Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

SS 2008
17.06.2008
Blatt 9

Übungen zu Topologie II

32. Sind m und n von 0 verschiedene ganze Zahlen und ist r der größte gemeinsame Teiler von m und n, so ist
$$\mathbb{Z}/m \otimes \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/r,$$
$$\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/r.$$

33. (a) Ist A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe mit $A \otimes A = 0$, so ist $A = 0$.
    (b) Gibt es eine abelsche Gruppe $G \neq 0$ mit $G \otimes G = 0$?

34. Eine kurze exakte Sequenz
$$(*) \qquad 0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$
von R-Moduln heißt spaltend, wenn es einen Homomorphismus $\sigma : C \to B$ mit $\psi \circ \sigma = id_C$ gibt.
    (a) Ist C frei, so ist $(*)$ spaltend.
    (b) Genau dann ist $(*)$ spaltend, wenn es einen Homomorphismus $\rho : B \to A$ gibt mit $\rho \circ \varphi = id_A$.
    (c) Ist $(*)$ spaltend, so ist $B \cong A \oplus C$.
    (d) Zeigen Sie mittels eines Beispiels, dass es Sequenzen gibt, die nicht spaltend sind.

35. Ist A eine abelsche Gruppe, so heißt
$$T(A) := \{x \in A \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = 0\}$$
die Torsionsuntergruppe von A. Zeigen Sie:
    (a) $A/T(A)$ ist torsionsfrei.
    (b) Ist B eine abelsche Gruppe, so ist $\mathrm{Tor}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, B) \cong T(B)$.
    (c) Sind A, B abelsche Gruppen, so ist
$$\mathrm{Tor}(A, B) \cong \mathrm{Tor}(T(A), T(B)).$$

Abgabe: Dienstag, den 24.06.2008, in der Vorlesung