Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
PROF. DR. W. SINGHOF

WS 2008/2009
24.10.2008
Blatt 2

# Übungen zu Topologie III

4. Seien $X, Y, Z$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, $x \in X$, und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ glatte Abbildungen.
   Zeigen Sie, dass $g \circ f$ glatt ist und dass die Kettenregel gilt:
$$T_x(g \circ f) = T_{f(x)}(g) \circ T_x(f).$$

5. Seien $X$ und $Y$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension $m$ bzw. $n$.
   (a) Erklären Sie, auf welche Weise $X \times Y$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$ ist.
   (b) Ist $x \in X$ und $y \in Y$, so ist
$$(T_{(x,y)}(pr_1), T_{(x,y)}(pr_2)) : T_{(x,y)}(X \times Y) \to T_x(X) \times T_y(Y)$$
   ein Isomorphismus.
   (c) Sind $Z, W$ weitere differenzierbare Mannigfaltigkeiten und sind $f : X \to Z$ und $g : Y \to W$ Submersionen, so ist auch $f \times g : X \times Y \to Z \times W$ eine Submersion.

6. Geben Sie ein Beispiel für eine injektive Immersion, deren Bild keine Untermannigfaltigkeit ist.

7. Sei $T$ der zweidimensionale Torus und $x \in T$. Zeigen Sie mittels einer Skizze, dass es eine Immersion von $T \setminus \{x\}$ in $\mathbb{R}^2$ gibt.

**Abgabe:** Freitag, den 31.10.2008, in der Vorlesung