Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2008/2009
31.10.2008
Blatt 3

Übungen zu Topologie III

8. Seien G und H Lie-Gruppen und $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Es gebe eine offene Umgebung U von e in G, so dass $f|U$ glatt ist. Zeigen Sie, dass f auf ganz G glatt ist.

9. Sei G eine Lie-Gruppe und $i : G \to G$ definiert durch $i(x) := x^{-1}$. Zeigen Sie mittels des Satzes über implizite Funktionen, dass i glatt ist und dass für $x \in G$ und $u \in T_x(G)$ gilt:

$$T_x(i) \cdot u = -x^{-1} \cdot u \cdot x^{-1} .$$

10. Sei $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Da G offen in $M_n(\mathbb{R})$ ist, identifizieren wir für jedes $x \in G$ den Tangentialraum $T_x(G)$ mit $M_n(\mathbb{R})$ vermöge des in §2 eingeführten Isomorphismus τ_x. Mit dieser Identifikation wird für $a \in G$ der Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} T_x(G) & \to & T_{ax}(G) \\ u & \mapsto & a \cdot u = T_x(L_a) \cdot u \end{array}$$

zu einer linearen Abbildung von $M_n(\mathbb{R})$ in sich. Wie sieht sie aus?

11. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene. Zeigen Sie:

   a) Die Gruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ operiert differenzierbar auf $\mathbb{H}$ durch

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}$$

   b) Diese Operation ist transitiv, d.h. es gibt nur eine Bahn.

   c) Der Stabilisator von i ist die Gruppe $\mathrm{SO}(2)$.

   d) $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$.

Abgabe: Montag, den 10.11.2008 in der Vorlesung