Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Prof. Dr. W. Singhof

WS 2008/2009
10.11.2008
Blatt 4

Übungen zu Topologie III

12. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$N(n) \quad := \quad \{(a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}) | \\ a_{ij} = 0 \text{ für } 1 \leq j < i \leq n \text{ und } a_{ii} = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n\} .$$

   a) $N(n)$ ist eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und ist diffeomorph zu $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.

   b) Für $n \geq 3$ ist $N(n)$ keine abelsche Gruppe und für $n \geq 2$ kein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

   c) Für $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, sei $\varphi_\mu : N(n) \to N(n)$ definiert durch

   $$(a_{ij}) \mapsto (\mu^{j-i} a_{ij}) .$$

   Zeigen Sie, dass φ_μ ein Automorphismus von Lie-Gruppen, aber für $\mu \neq 1$ kein innerer Automorphismus ist.

   d) Sei $\mathfrak{n}(n)$ die Menge der echten oberen Dreiecksmatrizen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

   $$\exp : A \mapsto \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

   ein Diffeomorphismus von $\mathfrak{n}(n)$ auf $N(n)$ ist.

13. Wir definieren $\varphi : S^1 \times \mathrm{SU}(n) \to \mathrm{U}(n)$ durch

$$\varphi(z, A) := \mathrm{diag}(z, 1, \ldots, 1) \cdot A$$

für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ und $A \in \mathrm{SU}(n)$. Zeigen Sie, dass φ ein Diffeomorphismus, aber für kein $n \geq 2$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

14. $\mathrm{SU}(2)$ ist diffeomorph zu S^3.

Abgabe: Montag, den 17.11.2008 in der Vorlesung
$\binom{2}{r}$