

NACHTRAG ZU DEN ÜBUNGEN

Aufgabe 33 (*Lineare Gleichungssysteme mit Parametern*):

b) Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ -6 & -3 & b \end{array} \right) \quad +6 \cdot \text{I} \\
 \sim & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & -15 & b+6a \end{array} \right) \quad \cdot \left(-\frac{1}{15}\right) \\
 \sim & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & a \\ 0 & 1 & -\frac{6a}{15} - \frac{b}{15} \end{array} \right) \quad +2 \cdot \text{II} \\
 \sim & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{3a}{15} - \frac{2b}{15} \\ 0 & 1 & -\frac{6a}{15} - \frac{b}{15} \end{array} \right) \quad .
 \end{aligned}$$

Aufgabe 36 (*Determinanten*):

Es gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 \det(A \cdot B) &= (a_1b_1 + a_2b_3)(a_3b_2 + a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_4)(a_3b_1 + a_4b_3) \\
 &= a_1b_1a_3b_2 + a_2b_3a_3b_2 + a_1b_1a_4b_4 + a_2b_3a_4b_4 \\
 &\quad - a_1b_1a_3b_2 - a_2b_4a_3b_1 - a_1b_2a_4b_3 - a_2b_3a_4b_4
 \end{aligned}$$

Es kürzen sich in die beiden Terme in der ersten Spalte und die in der letzten und wir kommen zu:

$$\begin{aligned}
 & a_2b_3a_3b_2 + a_1b_1a_4b_4 + a_2b_4a_3b_1 - a_1b_2a_4b_3 \\
 = & (a_1a_4 - a_2a_3)(b_1b_4 - b_2b_3) \\
 = & \det(A) \det(B)
 \end{aligned}$$

Wir rechnen nun mit der Formel aus der Vorlesung:

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A \cdot B)} \begin{pmatrix} a_3b_2 + a_4b_4 & -a_1b_2 - a_2b_4 \\ -a_3b_1 - a_4b_3 & a_1b_1 + a_2b_3 \end{pmatrix}$$

Andererseits gilt:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A) \det(B)} \begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

Nun haben wir eben berechnet, dass $\det(A) \det(B) = \det(A \cdot B)$ gilt. Wir müssen also nur noch

$$\begin{pmatrix} a_3b_2 + a_4b_4 & -a_1b_2 - a_2b_4 \\ -a_3b_1 - a_4b_3 & a_1b_1 + a_2b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

zeigen. Dies verifiziert sich durch einfache Matrixmultiplikation.