Aufgabe 15 (*Extremstellenbestimmung*):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3e^x \\ f'(x) &= 3x^2e^x + x^3e^x \\ &= (3+x)x^2e^x \\ f''(x) &= x^2e^x + 2(3+x)xe^x + (3+x)x^2e^x \\ &= (x + 2(3+x) + (3+x)x)xe^x \end{aligned}$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 0$ oder $x = -3$. Es gilt $f''(0) = 0$ und $f''(-3) = 9e^{-3}$. Damit ist an der Stelle $x = -3$ ein lokales Minimum. Weiter gilt $f(1) = e$ und $f(-1) = -e^{-1}$ und so kann an der Stelle $x = 0$ kein lokales Extremum liegen. Wir rechnen, dass f für $x \geq 0$ wachsend ist, also auf $[0,1]$ das absolute Minimum bei $x = 0$ und das Maximum bei $x = 1$ liegt.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 8x^3 + 16x^2 \\ f'(x) &= 4x^3 - 24x^2 + 32x \\ &= 4(x^2 - 6x + 8)x \\ f''(x) &= 12x^2 - 48x + 32 \end{aligned}$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 0$, $x = 2$ oder $x = 4$. Es gilt $f''(0) = 32$, $f''(2) < 0$ und $f''(4) > 0$. Also ist bei $x = 0$ und $x = 4$ ein lokales Minimum und bei $x = 2$ ein Maximum. Damit sehen wir, dass f zwischen 0 und 2 steigend ist, also auf $[0,1]$ das absolute Minimum bei $x = 0$ und das Maximum bei $x = 1$ liegt.

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{x+1}{x^2+1} \\ f'(x) &= \tfrac{1(x^2+1)-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \tfrac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \tfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Weiter gilt $f(-10) = \frac{11}{111}$, $f(-1-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1$. Wir sehen zuerst, dass an der Stelle $x = -1-\sqrt{2}$ ein Minimum liegen muss. Also ist bei $x_0 := -1+\sqrt{2}$ ein Maximum. f ist links von x_0 wachsend und recht von x_0 fallen, also ist x_0 das absolute Maximum auf $[0,1]$.

Aufgabe 16 (*Anwendungsbeispiele 1*):

$$\begin{aligned} A(Q) &= 2Q + 10 + \tfrac{32}{Q} \\ A'(Q) &= 2 - \tfrac{32}{Q^2} \\ A''(Q) &= \tfrac{64}{Q^3} \end{aligned}$$

Aus $A'(Q) = 0$ folgt $2 = \frac{32}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 = 16 \Leftrightarrow Q = \pm 4$. Es gilt $A''(-4) = -1$ und $A''(4) = 1$. Der Wert $Q = 4$ minimiert die Durschnittskosten.

$$\begin{aligned} A(Q) &= aQ + b + \tfrac{c}{Q} \\ A'(Q) &= a - \tfrac{c}{Q^2} \\ A''(Q) &= \tfrac{2c}{Q^3} \end{aligned}$$

Aus $A'(Q) = 0$ folgt $a = \frac{c}{Q^2} \Leftrightarrow Q^2 = \frac{a}{c} \Leftrightarrow Q = \pm\sqrt{\frac{a}{c}}$. Es gilt $A''(\sqrt{\frac{a}{c}}) > 0$, da $\sqrt{\frac{a}{c}} > 0$ ist und ebenso ist $A''(-\sqrt{\frac{a}{c}}) < 0$. Der Wert $Q = \sqrt{\frac{a}{c}}$ minimiert die Durschnittskosten.

Aufgabe 17 (*Anwendungsbeispiele 2*):

a) Der Gewinn ist $f(L) = 160 \cdot 2\sqrt{L} - 40L$. Es gilt $f'(L) = 160L^{-0.5} - 40$. Wir rechenen:

$$\begin{array}{lrcl} & 160L^{-0.5} - 40 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 4L^{-0.5} & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 4 & = & L^{0.5} \\ \Leftrightarrow & 16 & = & L \end{array}$$

b) Der Gewinn ist $f(Q) = Q(102 - 2Q) - 2Q - \frac{1}{2}Q^2 = -\frac{5}{2}Q^2 + 100Q$. Es gilt $f'(Q) = -5Q + 100$. Wir rechenen also, dass bei $Q = 20$ ein Maximum liegt.

Aufgabe 18 (*Anwendungsbeispiele 3*):

$$\begin{array}{rcl} V(x) & = & x(18 - 2x)^2 \\ & = & 18^2x - 4 \cdot 18x^2 + 4x^3 \\ V'(x) & = & 18^2 - 8 \cdot 18x + 12x^2 \\ & = & 12(x^2 - 12x + 27) \\ V''(x) & = & -8 \cdot 18 + 24x \end{array}$$

Aus $f'(x) = 0$ folgt $x = 3$ oder $x = 9$, wobei wir den Fall gleich 9 sofort ausschließen können, wir haben alles weggeschnitten (Hier leigt also ein Minimum). Also bleibt nur $x = 3$ als Maximum, was sich bestätigt, wenn wir $V(0) = V(9) = 0$ berechnen.