Aufgabe 1

a) $x^2 = 2x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x = \pm 1 \quad , y = 1$

b) $\dfrac{\frac{1}{16} e^{4x}}{1 + e^{4x}} = \dfrac{4 - \frac{3}{16} e^{4x}}{1 + e^{4x}}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{16} e^{4x} = 4 - \frac{3}{16} e^{4x}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} e^{4x} = 4$

$\Leftrightarrow \quad e^{4x} = 16 \quad | \sqrt[4]{\cdot}$

$\Leftrightarrow \quad e^{x} = 2$

$\Leftrightarrow \quad x = \ln(2)$

Aufgabe 2

$f(0) = -\frac{3}{2}$

$g(-\frac{3}{2}) = \dfrac{-\frac{3}{2} + 4}{-\frac{3}{2} - 3}$

$= \dfrac{-3 + 8}{-3 - 6}$

$= -\dfrac{5}{9}$

$g(0) = -\frac{4}{3}$

$f(-\frac{4}{3}) = \dfrac{-\frac{4}{3} + 3}{-\frac{4}{3} - 2}$

$= \dfrac{-4 + 9}{-4 - 6}$

$= -\dfrac{5}{10}$

$\Rightarrow g \circ f(0) = -\frac{5}{9} < -\frac{1}{2} = f \circ g(0)$

<u>Aufgabe 3</u>

a) $f(x) = x^2 \cdot 2^x$

$f'(x) = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

$= (2x + \ln(2) \cdot x^2) \cdot 2^x$

$f''(x) = (2 + 2 \cdot \ln(2)\, \cancel{x}) \cdot 2^x + (2x + \ln(2) \cdot x^2) \cdot \ln(2) \cdot 2^x$

$= (2 + 2 \cdot \ln(2) x + 2\ln(2) x + \ln(2)^2 \cdot x^2) \cdot 2^x$

$= (2 + 4 \cdot \ln(2) x + \ln(2)^2 \cdot x^2) 2^x$

$f'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x + \ln(2) \cdot x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 + \ln(2) x = 0 \quad \vee \quad x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{\ln(2)} \quad \vee \quad x = 0$

$f''(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 + 4 \cdot \ln(2)\, x + \ln(2)^2 \cdot x^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{4}{\ln(2)} x + \frac{2}{\ln(2)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{\ln(2)} \pm \sqrt{\frac{4}{\ln(2)^2} - \frac{2}{\ln(2)^2}} = x$

$\Leftrightarrow \quad \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{\ln(2)^2} = x$

- $f''(0) = 2$

$f''\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right) = (2 + 4 \cdot (-2) + 4) \cdot 2^{-\frac{2}{\ln(2)}} < 0$

Damit besitzt f bei $x = 0$ ein lokales Minimum und bie $x = -\frac{2}{\ln(2)}$ ein lokales Maximum.

b)
- $f'(1) = (2 + \ln(2)) \cdot 2 > 0$

  Also ist f auf $]0, \infty[$ steigend
- $f'(-1) = \frac{-2 + \ln(2)}{2} < 0$

  Also ist f auf $]-\frac{2}{\ln(2)}, 0[$ fellend
- $f'(-4) = \frac{-8 + \ln(2) \cdot 16}{16} > 0$

  Also ist f auf $]-\infty, -\frac{2}{\ln(2)}[$ steigend

Es gilt $-\frac{6}{\ln(2)} \leq \frac{-2-\sqrt{2}}{\ln(2)^2} \leq \frac{-2}{\ln(2)} \leq \frac{-2+\sqrt{2}}{\ln(2)^2} \leq 0$

c) $f''(0) > 0$

Also ist f auf $]\frac{-2+\sqrt{2}}{\ln(2)^2}, \infty[$ konvex

$\cancel{f''\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right)}$ [illegible] $\cancel{\frac{8}{\ln(2)}}$ $\cancel{\frac{4}{\ln(2)}) < 0}$ $\cancel{\ln(2) \approx 0{,}7}$

$f''\left(-\frac{2}{\ln(2)}\right) = (2 - 8 + 4)\, 2^{-\frac{2}{\ln(2)}} < 0$ konkav

Also ist f auf $]\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}[$

$f''\left(-\frac{6}{\ln(2)}\right) = (2 - 24 + 36)\, 2^{-\frac{6}{\ln(2)}} > 0$

Also ist f auf $]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}[$ konvex

Aufgabe 4

a) $f(x) = x^2 - 1$

$f'(x) = 2x$

$\varepsilon_f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

Wann gilt $\left| \dfrac{2x^2}{x^2-1} \right| > 1$?

Fall $x \in [0, 1[$:

$- \dfrac{2x^2}{x^2-1} > 1$

$\Leftrightarrow \quad -2x^2 < x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 < 3x^2$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} < x^2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{3}} < x$

Fall $x \in]1, \infty[$

$\dfrac{2x^2}{x^2-1} > 1$

$\Leftrightarrow \quad 2x^2 > x^2 - 1$

$\Leftrightarrow \quad x^2 > -1$

Es folgt : Für $x \in [0, \sqrt{\frac{1}{3}}[$ ist f unelastisch,

für $x \in [\sqrt{\frac{1}{3}}, \infty[$ ist f elastisch.

b) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f'(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\varepsilon_f(x) = \dfrac{-x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = -x^2$

Wann gilt $|\varepsilon_f(x)| \geq 1$: Für $x \geq 1$.

Also ist f für $x \in [1, \infty[$ elastisch.

Aufgabe 5

Eine Funktion f die durch Ableiten nach x die Form $y^2 + 9x^2y$ besitzt, ist:

$$y^2x + 3x^3y + c$$

Eine Funktion f die durch Ableiten nach y die Form $2xy + 3x^3$ hat, ist:

$$xy^2 + 3x^3y + c$$

Und es zeigt sich, dass $f(x,y) = xy^2 + 3x^3y$ eine mögliche Wahl ist.

Aufgabe 6

a) $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$

b) $\int x \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$

$= \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

c) Logarithmische Ableitung:

$F(x) = \ln(x^2 + x + 3)$

Aufgabe 7

$Df(x,y) = (3x^2 - 1,\ 3y^2 - 4) = 0$

Damit ist $P = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ eine kritische Stelle

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$

und $\det Hf\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} > 0$.

Da $\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ positiv sind, ist P ein lokales Minimum nach Vorlesung

Aufgabe 8

Es gilt $h(x,y) = x^2 y - \lambda(x+y+3)$

$\Rightarrow Dh(x,y) = (2xy - \lambda,\ x^2 - \lambda)$

Setzen wir dies Null, so erhalten wir mit der Nebenbedingung 3 Gleichungen

$$\begin{cases} x+y+3 = 0 \\ 2xy - \lambda = 0 \\ x^2 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ \lambda = 2xy \\ \lambda = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ \lambda = -2x^2 - 6x \\ x^2 = -2x^2 - 6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3-x \\ \lambda = -2x^2 - 6x \\ 3x^2 = -6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 & \vee & y = -1 \\ \lambda = 0 & \vee & \lambda = 4 \\ x = 0 & \vee & x = -2 \end{cases}$$

Damit ist $(0,-3)$ eine kritisch Stelle und ebenso ist $(-2,-1)$ eine kritische Stelle.

Nachtrag Aufgabe 7

$$Df(x,y) = (3x^2-1,\ 3y^2-4)$$

Df hat Nullstellen bei $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.
Mit der Hessematrix entpuppen sich aber nur zwei als Extrema:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Damit steht

$$Hf\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{4}}\right) \quad \text{für ein Minimum}$$

und

$$Hf\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, \sqrt{\tfrac{1}{4}}\right) \quad \text{für eim Maximum. (Siehe Vorlesung)}$$

* Den Punkt $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ entlarven wir als Sattel:

$$f\left(x, \sqrt{\tfrac{4}{3}}\right) = x^3 - x + c \qquad \left(\text{mit } c = \sqrt{\tfrac{4}{3}}^3 - 4\sqrt{\tfrac{4}{3}}\right)$$

besitzt bei $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum, während

$$f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}, y\right) = c + y^3 - 4y \qquad \left(\text{mit } c' = -\sqrt{\tfrac{1}{3}}^3 + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\right)$$

bei $y = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ein Minimum besitzt. Es gibt um $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ also Punkte mit größerem und kleinerem Funktionswert. Es kann also kein lokales Extremum geben, $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ebenso. Die Technik nach dem Stern „*" übersteigt das Wissen welches für die Klausur nötig sein wird.