Nachtrag Aufgabe 7

$$Df(x,y) = (3x^2 - 1, 3y^2 - 4)$$

Df hat Nullstellen bei $\left(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

Mit der Hessematrix entpuppen sich aber nur zwei als Extrema:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$$

Damit steht

$Hf\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{4}}\right)$ für ein Minimum

und

$Hf\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{4}}\right)$ für ein Maximum. (Siehe Vorlesung)

* Den Punkt $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ entlarven wir als Sattel:

$f\left(x, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) = x^3 - x + c$ (mit $c = \sqrt{\frac{4}{3}}^3 - 4\sqrt{\frac{4}{3}}$)

besitzt bei $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ ein Maximum, während

$f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, y\right) = c + y^3 - 4y$ (mit $c' = -\sqrt{\frac{1}{3}}^3 + \sqrt{\frac{1}{3}}$)

bei $y = \sqrt{\frac{4}{3}}$ ein Minimum besitzt. Es gibt um $\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ also Punkte mit größerem und kleinerem Funktionswert. Es kann also kein lokales Extremum geben, $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ ebenso. Die Technik nach dem Stern „*" übersteigt das Wissen welches für die Klausur nötig sein wird.