

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I
Lösungsvorschlag für Übungsblatt 11

Aufgabe 1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

- (a) Behauptung: “Sind $f: V \rightarrow U$ und $g: W \rightarrow V$ lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen, so ist die Abbildung $h: x \mapsto f(g(x))$ eine lineare Abbildung von W nach U .”

Antwort: Die Aussage ist richtig! Dies prüft man wie folgt nach: Seien $x, y \in W$ zwei Vektoren und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen, so gilt

$$\begin{aligned} h(\lambda x + \mu y) &= f(g(\lambda x + \mu y)) \stackrel{g \text{ linear}}{=} f(\lambda g(x) + \mu g(y)) \\ &\stackrel{f \text{ linear}}{=} \lambda f(g(x)) + \mu f(g(y)) = \lambda h(x) + \mu h(y). \end{aligned}$$

- (b) Behauptung: “Die Abbildung $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + x_2x_3$ ist linear.”

Antwort: Diese Aussage ist falsch. Zum Beispiel ist $F(0, 1, 1) = 1 \neq 0 = F(0, 1, 0) + F(0, 0, 1)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Normen und Skalarprodukte.

$$(a) \|u\| \quad (b) \|v - w\| \quad (c) \|w - u\| \quad (d) \langle u, v \rangle \quad (e) \langle v, w \rangle \quad (f) \langle u, w \rangle$$

Lösung:

Hier muss man nur die Werte in die Formeln aus der Vorlesung einsetzen. Die Ergebnisse sind

$$\begin{aligned} (a) \|u\| &= 5 & (b) \|v - w\| &= 7 & (c) \|w - u\| &= 5 \\ (d) \langle u, v \rangle &= -20 & (e) \langle v, w \rangle &= 11 & (f) \langle u, w \rangle &= 13 \end{aligned}$$