Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. T. Weist, Dr. S. Kionke

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler I

Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Hier sind Lösungsvorschläge für die Aufgaben 1, 2 und 4c.

Aufgabe 1 (3 Punkte, Multiple Choice)**.** Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

(a) Behauptung: Für jede reelle Zahl a gilt $2a - 1 \leq a^2$.
Die Aussage ist *richtig*, denn $a^2 = a^2 - 2a + 1 + 2a - 1 = (a-1)^2 + 2a - 1 \geq 2a - 1$.

(b) Behauptung: Die Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \leq -\frac{1}{2}$ hat genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}$.
Die Aussage ist *falsch*. Die Gleichung hat gar keine Lösung, denn die linke Seite ist immer positiv. Achtung: Man sollte beim Auflösen von Ungleichungen nicht quadrieren (es sei denn beide Seiten der Ungleichung sind positiv)!

(c) Behauptung: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{x^2}$ ist streng monoton steigend.
Die Aussage ist *falsch*. Die Funktion ist nicht streng monoton steigend, denn $-1 < 0$ aber $f(-1) = e > 1 = f(0)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** (a) Man kann die Ausdrücke wie folgt vereinfachen:

$$\text{(i)}\ \log_{41}(\log_3(81) - \log_5(125)) = \log_{41}(4-3) = \log_{41}(1) = 0$$

$$\text{(ii)}\ \log_a(150a) - 2\log_a(5) - \frac{\ln(6)}{\ln(a)} = 1 + \log_a(150) - \log_a(25) - \log_a(6) = 1$$

(b) Wir wollen die Gleichung $\ln(9x^2 - 3x + e - 1) = 1$ lösen.
Anwenden der Exponentialfunktion liefert die äquivalente Gleichung

$$9x^2 - 3x + e - 1 = e$$

oder besser $9x^2 - 3x - 1 = 0$. Man kann diese quadratische Gleichung nun wie gewohnt lösen.

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+36}}{18}.$$

Es gibt also zwei Lösungen $\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{5}}{6}$ und $\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Aufgabe 4. (c) Lösen Sie die Betragsgleichung $|2x-1| = x^2 - 2x - 3$.

Wir stellen zunächst fest, dass die Betragsgleichung keine Definitionslücken hat. Um die Betragsgleichung zu lösen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

Fall 1: $2x - 1 \geq 0$ (d.h. $x \geq \frac{1}{2}$).
In diesem Fall müssen wir die quadratische Gleichung $2x - 1 = x^2 - 2x - 3$ lösen. Wir stellen alle Terme auf eine Seite und erhalten die Gleichung

$$x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Mit Hilfe der Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen erhalten wir zwei Lösungen

$$x_1 = 2 + \sqrt{6} \quad x_2 = 2 - \sqrt{6}.$$

Wir betrachten gerade aber nur den Bereich $x \geq \frac{1}{2}$. Die Lösung x_1 liegt in diesem Bereich, die Lösung x_2 aber nicht! In Fall 1 finden wir also nur eine Lösung, nämlich $x_1 = 2 + \sqrt{6}$.

Fall 2: $2x - 1 < 0$ (d.h. $x < \frac{1}{2}$).
In diesem Fall müssen wir die quadratische Gleichung $1 - 2x = x^2 - 2x - 3$ lösen. Wir bringen alle Terme auf eine Seite und müssen also die Gleichung

$$x^2 - 4 = 0$$

lösen. Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2.$$

Wir betrachten aber nur den Bereich $x < \frac{1}{2}$. Die Lösung x_3 liegt nicht in diesem Bereich! Sie ist also keine Lösung der Betragsgleichung. Die Lösung $x_4 = -2$ liegt im betrachteten Bereich und ist somit eine Lösung.

Die Betragsgleichung $|2x-1| = x^2 - 2x - 3$ hat also nur die zwei Lösungen -2 und $2 + \sqrt{6}$.