3.4 Vektorräume und Lineare Abbildungen

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist, vereinfacht gesagt, eine nicht-leere Menge V zusammen mit einer Addition $+ : V \times V \to V$ und einer Skalarmultiplikation $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, so dass die Rechenregeln erfüllt sind, die für den $\mathbb{R}^n$ gelten.

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so gehen wir in der Regel davon aus, dass $V = \mathbb{R}^n$ ist für ein $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1 *Ein Untervektorraum U eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V ist eine Teilmenge $U \subset V$, so dass*

1. $U \neq \emptyset$
2. *für alle $x, y \in U$ gilt $x + y \in U$*
3. *für alle $x \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda \cdot x \in U$*

Bemerkung 2

- Im Folgenden werden wir den Punkt $\cdot$ für die Skalarmultiplikation oft weglassen.
- Die zweite und dritte Bedingung kann man zusammenfassen zu: für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in U$ gilt, dass
$$\lambda x + \mu y \in U$$
- Für jeden Untervektorraum U gilt $0 \in U$, da $x + (-1)x = 0$. Deswegen prüft man die erste Bedingung oft, indem man $0 \in U$ zeigt.

Beispiel 3

Die Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$ sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$, die Geraden

$$G_v := \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, und der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ selbst.

Die Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset \mathbb{R}^2$, die Geraden

$$G_v := \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$, die Ebenen

$$E_{v,w} := \{\lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

wobei $v, w \in \mathbb{R}^3$ mit $v, w \neq 0$ und $v \neq \lambda w$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und der Vekttorraum $\mathbb{R}^3$ selbst. Zum Beispiel ist für $v = (1,0,0)^T$ und $w = (0,1,0)^T$ der Untervektorraum $E_{v,w}$ die (x, y)-Ebene im dreidimensionalen Raum.

Definition 4 *Seien V, W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Dann heißt eine Abbildung $f : V \to W$ linear, wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dass*

1. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$
2. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Bemerkung 5

- Die beiden Bedingung kann man zu einer Bedingung zusammenfassen: für alle $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt, dass
$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

- Für eine lineare Abbildung gilt immer $f(0) = 0$, da nach der ersten Bedingung gilt, dass $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$ für ein beliebiges $x \in V$.

Beispiel 6

Seien $V = W = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ fest. Dann ist

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f_a(x) = ax$$

linear, da

$$f_a(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f_a(x) + f_a(y)$$

und

$$f_a(\lambda x) = a(\lambda x) = a\lambda x = \lambda ax = \lambda f_a(x)$$

Die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$ mit $b \neq 0$ sind nicht linear, da eben $f(0) = b \neq 0$.

Die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ haben alle die Form

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Zum Beispiel erhält man für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Abbildung

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

Definition 7 *Seien V, W zwei Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0\}$$

der Kern von f und

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in V\}$$

das Bild von f.

Weiter heißt f injektiv, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ und surjektiv, wenn $\mathrm{Im}(f) = W$.

Bemerkung 8

- $\mathrm{Ker}(f)$ ist ein Untervektorraum von V und $\mathrm{Im}(f)$ ein Untervektorraum von W.

Ist $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$, so ist eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f_A(x) = Ax$, wobei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

und

$$\mathrm{Im}(f_A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}.$$

Dann ist der Kern also die Lösungsmenge des Linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ und das Bild besteht aus den Vektoren $y \in \mathbb{R}^m$, für die das Lineare Gleichungssytem $Ax = y$ mindestens eine Lösung hat.