Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 13.06.2018

Blatt 10

Übungen zu Gröbner-Basen

28. Das Ideal $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle \subset \mathbb{Q}[x,y,z]$ sei gegeben durch

$$f_1 = x^3y + x^2,$$
$$f_2 = x^2y^3 + y^2,$$
$$f_3 = x^4y + x^2 + y^2.$$

Mit I_1 werde wie immer das erste Eliminationsideal bezeichnet.

(a) Zeigen Sie $I_1 = \langle y^2 \rangle$.
Hinweis: Bei Teil (a) ist die maschinelle Bestimmung einer Gröbner-Basis zulässig.

(b) Es sei $\widetilde{I} = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$, wobei $f_4 = y$. Zeigen Sie $I \neq \widetilde{I}$.

(c) Zeigen Sie $V(I) = V(\widetilde{I})$.

29. Für einen beliebigen Körper k seien $f_1, f_2 \in k[x,y,z]$ gegeben durch

$$f_1 = (y-z)x^2 + xy - 1,$$
$$f_2 = (y-z)x^2 + xz - 1.$$

Zeigen Sie ohne Berechnung einer Gröbner-Basis, dass $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle xy - 1, xz - 1 \rangle$.

30. Es sei k ein beliebiger Körper. Für $\alpha, \beta \in k$ seien $f, g \in k[x]$ geben durch

$$f = x^2 - \alpha, \quad g = x^2 - \beta.$$

Ferner seien für $\xi_1, \ldots, \xi_4 \in k$ die Polynome $A, B \in k[x]$ gegeben durch

$$A = \xi_1 x + \xi_2,$$
$$B = \xi_3 x + \xi_4.$$

Es ist klar, dass f und g genau dann einen gemeinsamen Faktor haben, wenn $\alpha = \beta$. Wir wollen dieses Frage trotzdem mit Lemma 8.2 untersuchen. Schreiben Sie dazu die Gleichung $Af + Bg = 0$ in ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\xi_1, \ldots, \xi_4$ um. Für welche Werte von α und β besitzt es eine nicht-triviale Lösung?

Besprechung: 20. Juni