Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 20.06.2018

Blatt 11

Übungen zu Gröbner-Basen

31. Für $p \in k[x] \setminus k$ sei p' die formale Ableitung. Dann bezeichnet man $\operatorname{Res}(p, p', x)$ als *Diskriminante* von p.

    Sei nun k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Res}(p, p', x) = 0$ genau dann gilt, wenn es $\alpha \in k$ mit $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$ gibt.

32. Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Geben Sie $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ und $(c_2, \dots, c_n) \in k^{n-1}$ an, so dass

    (a) $\operatorname{Res}(f, g, x_1)$ in $(c_2, \dots, c_n)$ verschwindet,

    (b) $a_0(c_2, \dots, c_n) = b_0(c_2, \dots, x_n) = 0$ und

    (c) es ein $c_1 \in k$ gibt, so dass $f(c_1, \dots, c_n) = g(c_1, \dots, c_n) = 0$.

    Dabei sind a_0 und b_0 bestimmt durch

    $$\begin{aligned} f &= a_0(x_2, \dots, x_n)x_1^\ell + \dots + a_\ell(x_2, \dots, x_n), && a_0 \neq 0,\\ g &= b_0(x_2, \dots, x_n)x_1^m + \dots + b_m(x_2, \dots, x_n), && b_0 \neq 0. \end{aligned}$$

    Hinweis: Mit dieser Aufgabe widerlegen Sie den „either-or“ Teil der Aussage von Proposition 3.6.3 aus der zweiten Auflage von Cox, Little und O'Shea. (In der dritten findet sich eine komplett andere Formulierung).

33. Gegeben sei die parametrisierte Kurve

    $$V = \left\{ \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right) \in \mathbb{C}^2 \middle| t \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \right\}.$$

    (a) Verwenden Sie eine geeignete Resultante, um ein Polynom $h \in \mathbb{C}[x, y]$ zu konstruieren, für welches

    $$V \subset \left\{ (u, v) \in \mathbb{C}^2 \middle| h(u, v) = 0 \right\}.$$

    Hinweis: Das Nullpolynom wird nicht als Lösung akzeptiert.

    (b) Zeigen Sie

    $$V = \left\{ (u, v) \in \mathbb{C}^2 \middle| h(u, v) = 0 \right\}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie Satz 8.10.

Besprechung: 27. Juni