Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 27.06.2018

Blatt 12

Übungen zu Gröbner-Basen

34. Für die unten angegebenen Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x, y]$ seien $I = \langle f, g\rangle$ und $I_1 = I \cap \mathbb{Q}[y]$. Stellen Sie fest, ob $\operatorname{Res}(f, g, x)$ das Ideal I_1 erzeugt.

    (a) $f = xy - 1$ und $g = x^2 + y^2 - 4$.

    (b) f ist wie in Teil (a) und $g = x^2 y + y^2 - 4$.

    Hinweis: Hilfsmittel sind erlaubt.

35. Für einen Körper k und $\ell \geq m$ seien $f, g, h \in k[x]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^\ell + \cdots + a_\ell, && a_0 \neq 0,\\ g &= b_0 x^m + \cdots + b_m, && b_0 \neq 0,\\ h &= f - \frac{a_0}{b_0} x^{\ell-m} g. \end{aligned}$$

    Der Grad von h sei n. Zeigen Sie

$$\operatorname{Res}(f, g, x) = (-1)^{m(\ell-n)} b_0^{\ell-n} \operatorname{Res}(h, g, x).$$

    Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst den Spezialfall $n = \ell - 1$.

    Von dieser Formel aus lässt sich ein Verfahren zur Bestimmung der Resultanten entwickeln, das auf dem euklidischen Algorithmus aufbaut.

36. Verwandeln Sie die laiensprachliche Formulierung

    Zwei parallele Graden schneiden sich im Unendlichen

    in eine Aussage über Mengen im $\mathbb{P}^2(k)$ und zeigen Sie sie. Benötigen Sie irgendwelche Bedingungen an den Körper k?

    Hinweis: Die erste Teilaufgabe besteht darin, sich zu überlegen, was parallele Graden im projektiven Raum sein könnten.

Besprechung: 11. Juli