Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 11.07.2018

Blatt 13

Übungen zu Gröbner-Basen

37. Es sei $>$ die Termordnung $>_{\text{grevlex}}$ auf den Monomen in $k[x_1, \ldots, x_n]$. Bestimmen Sie die zugehörige homogenisierte Termordung $>_h$ im Sinne von Definition 9.10 auf den Monomen in $k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

38. (Eulersche Formel) Es sei k ein Körper und es sei $f \in k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ homogen vom Totalgrad m. Mit $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ werden die formalen partiellen Ableitungen von f bezeichnet. Zeigen Sie
$$\sum_{j=0}^{n} x_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = mf.$$

39. In $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ seien die Polynome
$$f_1 = x_1 x_2 - 1 \quad \text{und} \quad f_2 = x_2 x_3 + 1$$
gegeben. Bestimmen Sie die Homogenisierungen f_1^h und f_2^h und zeigen Sie, dass die zugehörige projektive Varietät
$$W := \left\{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \middle| f_1^h(x_0, x_1, x_2, x_3) = f_2^h(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \right\}$$
eine irreduzible Komponente besitzt, welche nur unendlich ferne Punkte enthält.

    Hinweis: Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis von $\langle f_1, f_2 \rangle$ zu einer geeigneten Termordnung.

    Wir machen in der letzten Woche noch Theorie hierzu, diese Aufgabe ist aber bereits jetzt ad hoc lösbar.

Besprechung: 18. Juli