

## Übungen zu Gröbner-Basen

4. Dividieren Sie in  $\mathbb{R}[x, y]$

$$f = x^5y^2 + x^3y^2 - y + 1$$

durch

$$F = (xy^2 - x, x - y^3).$$

Verwenden Sie einmal  $>_{\text{lex}}$  und einmal  $>_{\text{grevlex}}$ . In beiden Fällen soll  $x > y$  gelten.

5. (a) Es seien  $f, f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$  und es seien  $a_1, \dots, a_s$  und  $r \neq 0$  das Ergebnis des Divisionsalgorithmus. Zeigen Sie

$$\text{multideg}(r) \leq \text{multideg}(f).$$

- (b) Geben Sie ein Beispiel an, bei welchem  $f \neq r$  und  $\text{multideg}(r) = \text{multideg}(f)$  gelten.

6. Verwenden Sie den Divisionsalgorithmus um zu zeigen, dass es zu jedem  $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$  Polynome  $h_1, h_2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$  gibt, so dass

$$f = h_1 \cdot (y - x^2) + h_2 \cdot (z - x^3) + r$$

für ein  $r$ , welches nur von  $x$  abhängt.