Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 25.04.2018

Blatt 3

Übungen zu Gröbner-Basen

7. Zeigen Sie, dass auf $k[x, y]$ die Termordnungen $>_{\text{grlex}}$ und $>_{\text{grevlex}}$ übereinstimmen.

8. Der Polynomring $\mathbb{R}[x, y, z]$ sei mit $>_{\text{lex}}$ versehen, wobei $x > y > z$. Zeigen Sie, dass $G = \{y - x^3, y - x^2\}$ keine Gröbner-Basis von $\langle G \rangle$ ist.

9. Der Polynomring $\mathbb{R}[x, y, z]$ sei wieder mit $>_{\text{lex}}$ versehen, wobei $x > y > z$. Es seien
$$g_1 = x + z, \quad g_2 = y - z.$$
Wir hatten in Beispiel 4.6 gesehen, dass $G = \{g_1, g_2\}$ eine Gröbner-Basis ist. Dividieren Sie xy durch (g_1, g_2) und durch (g_2, g_1) und vergleichen Sie die Ergebnisse.

10. Es sei I ein Ideal in $k[x_1, \ldots, x_n]$ und es sei G eine endliche Teilmenge von I. Zeigen Sie, dass G genau dann eine Gröbner-Basis von I ist, wenn die folgende Aussage gilt:

    Ein Polynom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ liegt genau dann in I, wenn $\overline{f}^G = 0$.

Besprechung: 2. Mai