

Übungen zu Gröbner-Basen

11. Geben Sie eine Termordnung sowie Polynome f und g in $\mathbb{R}[x, y]$ an, so dass der Totalgrad des S-Polynoms $S(f, g)$ echt größer als das Maximum der Totalgrade von f und g ist.
12. Es sei $\{0\} \neq I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und es sei $>$ eine Termordnung. Zeigen Sie:
 - (a) Jedes $f \in I$ kann in der Form $f = g + r$ geschrieben werden, wobei $g \in I$ und kein Term von r in $\text{LT}(I)$ ist.
 - (b) Die Polynome g und r in (a) sind eindeutig bestimmt.
13. Es sei $\{0\} \neq I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ein Ideal und es sei G eine Gröbner-Basis für I zu einer vorgegebenen Termordnung.
 - (a) Zeigen Sie für alle $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$

$$\overline{f+g}^G = \overline{f}^G + \overline{g}^G.$$

- (b) Geben Sie in $\mathbb{R}[x, y]$ ein Ideal I , eine Termordnung, eine zugehörige Gröbner-Basis G von I und $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ an, so dass

$$\overline{fg}^G \neq \overline{f}^G \cdot \overline{g}^G.$$

Besprechung: 9. Mai