Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 09.05.2018

Blatt 5

Übungen zu Gröbner-Basen

14. Im $\mathbb{R}[x, y, z]$ sei das Ideal $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ gegeben durch
$$f_1 = x^2 - y, \quad f_2 = x^3 - z.$$
Bestimmen Sie die reduzierte Gröbner-Basis von I bezüglich $>_{\text{lex}}$ mit $x > y > z$.
Hinweis: Die Verwendung elektronischer Hilfsmittel ist erlaubt, dabei müssen aber alle S-Polynome und alle Divisionsreste dieser S-Polynome festgehalten werden.

15. Stellen Sie fest, ob $f = xy^3 - z^2 + y^5 - z^3$ in dem von $f_1 = y - x^3$ und $f_2 = x^2y - z$ erzeugten Ideal in $\mathbb{R}[x, y, z]$ liegt.
Es gilt derselbe *Hinweis* wie bei Aufgabe 14.

16. Zu gegebenem $A \in k^{n \times m}$ und $i = 1, \ldots, n$ seien
$$f_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} x_j$$
die durch die Zeilen von A bestimmten linearen Polynome und es sei $I = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \subset k[x_1, \ldots, x_m]$. Der Polynomring sei versehen mit $>_{\text{lex}}$ mit $x_1 > \cdots > x_m$. Schließlich sei B eine Matrix in Zeilenstufenform, die durch elementare Zeilenumformungen aus A hervorgeht. Die ersten t Zeilen von B seien von Null verschieden, die anderen nicht. Für $i = 1, \ldots, t$ setze
$$g_i = \sum_{j=1}^{m} b_{i,j} x_j.$$
(a) Zeigen Sie $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$.
(b) Zeigen Sie, dass $G := \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis von I ist.
(c) Wie muss die Zeilenstufenform aussehen, damit G reduziert ist?

Besprechung: 16. Mai