Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 16.05.2018
Blatt 6

Übungen zu Gröbner-Basen

17. Mit σ_i^n werde für $1 \leq i \leq n$ das i-te elementarsymmetrische Polynom in $k[x_1, \ldots, x_n]$ bezeichnet. Ferner sei $\sigma_0^n = 1$ und $\sigma_i^n = 0$ falls $i < 0$ oder $i > n$. Für $\ell \in \mathbb{N}_0$ sei schließlich $s_\ell^n = \sum_{j=1}^n x_j^\ell$.

    (a) Zeigen Sie $\sigma_i^n = \sigma_i^{n-1} + x_n \sigma_{i-1}^{n-1}$ für $n > 1$ und beliebiges i.

    (b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion nach n für alle $n, \ell \geq 1$

    $$\sum_{j=1}^{\ell} (-1)^{\ell-j} \sigma_{\ell-j}^n s_j^n + (-1)^\ell \ell \sigma_\ell^n = 0.$$

    (c) Zeigen Sie nun die Newtonschen Identitäten

    $$s_\ell^n + \sum_{j=1}^{\ell-1} (-1)^j \sigma_j^n s_{\ell-j}^n + (-1)^\ell \ell \sigma_\ell^n = 0, \qquad 1 \leq \ell \leq n,$$

    $$s_\ell^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \sigma_j^n s_{\ell-j}^n = 0, \qquad \ell > n.$$

18. Es sei $F \in k[x_1, \ldots, x_n, X]$ gegeben durch

    $$F = \prod_{j=1}^n (X - x_j)$$

    und es seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die elementarsymmetrischen Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.

    (a) Zeigen Sie

    $$F = X^n + \sum_{j=1}^n (-1)^j \sigma_j X^{n-j}.$$

    Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach n und Aufgabe 17 (a).

    (b) Es sei $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluss von k, es sei $f \in k[X]$, es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f in $\overline{k}$, aufgezählt entsprechend ihrer Vielfachheiten, und es sei $g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ ein symmetrisches Polynom. Zeigen Sie $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in k$.

Besprechung: 23. Mai