Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 30.05.2018
Blatt 8

Übungen zu Gröbner-Basen

22. Es sei k ein Körper der Charakterstik 0, es sei $H \leq \mathrm{GL}_n(k)$ eine endliche Matrixgruppe, es sei $>$ eine beliebige Termordnung und es sei $g_1, \ldots, g_t$ eine Abzählung von $\left\{R_H(x^\beta)\middle|1 \leq |\beta| \leq |H|\right\}$. Zeigen Sie, dass $G \coloneqq \{g_1, \ldots, g_t\}$ eine Gröbner-Basis für das von den nicht-konstanten, homogenen Invarianten erzeugte Ideal ist.

23. Für eine primitive d-te Einheitswurzel ω sei $H = \left\{\omega^j\middle|0 \leq j < d\right\}$. Wir betrachten H als Untergruppe der $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$. Bestimmen Sie das kleinste n, so dass $\mathbb{C}[x]^H = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$ für geeignete homogene Invarianten $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x]$.

24. Es sei $H \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ die von $A \coloneqq \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ erzeugte Untergruppe.

    (a) Zeigen Sie $|H| = 3$.

    (b) Bestimmen Sie homogene $f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$, so dass

    $$\mathbb{Q}[x_1, x_2]^H = \mathbb{Q}[f_1, f_2, f_3].$$

    Hinweis: Für dieses Beispiel lässt sich die Methode von E. Noether zu Fuß durchrechnen.

Besprechung: 6. Juni