

Analysis I

Rüdiger W. Braun

Sommersemester 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Definition, Satz und Beweis	2
1.1	Definition	2
1.2	Axiom	2
1.3	Satz	2
1.4	Beweis	3
1.4.1	Direkter Beweis	3
1.4.2	Beweis durch Kontraposition	3
1.4.3	Beweis durch Widerspruch	3
1.4.4	Falscher Beweis	4
1.4.5	Folgerungsketten	4
1.5	Beispiel	4
2	Naive Mengenlehre	5
3	Ganze Zahlen und vollständige Induktion	8
4	Die reellen Zahlen	10
4.1	Körperaxiome	10
4.2	Anordnungsaxiome	11
4.3	Vollständigkeitsaxiom	12
5	Folgen und ihre Grenzwerte	15
6	Reihen	19
7	Dezimaldarstellung	22
8	Stetige Funktionen	23

Buchempfehlungen

Es gibt viele Bücher zur Analysis. Diese Vorlesung orientiert sich an der Analysis I [For16] von Forster, ihr zweiter Teil im Wintersemester 2025/26 dann an der Analysis II [For13] von Forster.

Sehr gut finde ich auch die Analysis 1 [Kab00] und die Analysis 2 [Kab97] von Kaballo. Die Bücher von Kaballo sind sehr viel umfangreicher und behandeln auch Themen, für die in der Vorlesung keine Zeit ist.

Ein Buch, welches versucht, den Übergang von Schule zu Hochschule zu erleichtern, dann aber doch viel macht, was wir nicht brauchen, ist das von Schichl und Steinbauer [SS18].

1 Definition, Satz und Beweis

1.1 Definition

Eine *Definition* vergibt einen Namen oder eine Abkürzung für ein oder mehrere Objekte.

Beispiele

- Eine natürliche Zahl a heißt *Teiler* einer natürlichen Zahl b , wenn es eine natürliche Zahl c mit $ac = b$ gibt.
- Eine *Primzahl* ist eine natürliche Zahl > 1 , die keine Teiler außer 1 und sich selbst hat.
- $h_n := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ heißt *n-te harmonische Zahl*.

Jedes Objekt kann nur einmal definiert werden.

1.2 Axiom

Axiome beschreiben das Regelwerk einer Struktur. Sie sind daher eigentlich auch Definitionen.

1.3 Satz

Das ist eine wahre, nicht offensichtliche Aussage. Jeder Satz besitzt einen Beweis. Auch wenn man es nicht immer sofort sieht, haben alle Sätze die Gestalt $a \Rightarrow b$. Dabei ist a die Voraussetzung und b die Behauptung.

Varianten:

Hauptsatz, Theorem Besonders wichtiger Satz

Lemma Meist Hilfssätze. Nach Personen benannte Lemmata sind dagegen in Wirklichkeit Theoreme (Bsp: Zornsches Lemma)

Korollar Direkte Folgerung aus einem anderen Satz; oft ist der Beweis so kurz, dass man ihn nicht hinschreibt

Wichtige Sätze haben Namen: Zwischenwertsatz, Satz von H. A. Schwarz

1.4 Beweis

Ein Beweis ist die Herleitung einer Aussage durch logische Schlüsse.

1.4.1 Direkter Beweis

1.1 Satz. *Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.*

Beweis. Sei n gerade. Dann existiert m mit $n = 2m$. Also $n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$. $\square$

1.4.2 Beweis durch Kontraposition

Ein Beweis durch Kontraposition wird geführt, indem man aus der Negation der Behauptung die Negation der Voraussetzung herleitet.

1.2 Satz. *Wenn n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.*

Beweis. Wir zeigen: Wenn n ungerade ist, dann ist n^2 ungerade. Wenn n ungerade ist, dann gibt es m mit $n = 2m + 1$. Dann $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Daher ist n^2 ungerade. $\square$

1.4.3 Beweis durch Widerspruch

Aus einer richtigen Aussage kann man nur richtige Aussagen herleiten. Wenn man also aus einer Aussage eine falsche Aussage herleiten kann, dann war die erste Aussage auch schon falsch.

1.3 Satz (Euklid). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, es gebe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, \dots, p_n$ für ein geeignetes n . Setze $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Die Zahl q besitzt einen Primteiler r . Dieser kann aber keines der p_j sein, denn q lässt bei Division durch p_j den Rest 1. Wir haben den folgenden Widerspruch gefunden

- Die Aufzählung $p_1, \dots, p_n$ umfasst alle Primzahlen.
- Es gibt eine von den Zahlen $p_1, \dots, p_n$ verschiedene Primzahl.

Daher war die Annahme falsch. $\square$

1.4.4 Falscher Beweis

Beide Beispiele sind aus Schichl, Steinbauer.

1.4 Satz (Achtung Lüge!). *In Wien gibt es in allen Häusern Ratten.*

Beweis. In Häusern, in denen es Ratten gibt, werden Rattenfallen aufgestellt. In Wien stehen in jedem Haus Rattenfallen. Also gibt es in jedem Haus Ratten. $\square$

1.5 Satz (Achtung Lüge!). $1 = 2$

Beweis.

$$\begin{array}{ll} a = b & \cdot a \\ a^2 = ab & + a^2 \\ a^2 + a^2 = a^2 + ab & \\ 2a^2 = a^2 + ab & - 2ab \\ 2a^2 - 2ab = a^2 - ab & \\ 2(a^2 - ab) = 1(a^2 - ab) & \end{array}$$

Also $2 = 1$. $\square$

1.4.5 Folgerungsketten

Folgerungsketten wie in 1.4.4 werden von oben nach unten gelesen und bedeuten, dass jede Zeile aus der darüber stehenden folgt. Wenn man etwas anderes meint, muss man das durch umgekehrte Implikationspfeile oder Äquivalenzpfeile anzeigen. Besser ist es, die Folgerungskette neu zu schreiben.

1.5 Beispiel

Beispiele helfen beim Verständnis. Auch noch so viele Beispiele ersetzen aber keinen Beweis.

Ein einziges Gegenbeispiel widerlegt aber eine Vermutung.

1.6 Vermutung (Fermat 1640). *Für jede Primzahl p ist $2^{2^p} + 1$ eine Primzahl.*

Gegenbeispiel, Euler 1732.

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417. \quad \square$$

2 Naive Mengenlehre

“Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand mehr vertreiben können.”

David Hilbert

“Spätere Generationen werden die Mengenlehre als Krankheit ansehen, die man überwunden hat.”

Henri Poincaré

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von Objekten. Die in diesem Sinne zusammengefassten Objekte heißen *Elemente* der Menge.

2.1 Beispiel. Die folgenden Mengen sind “einfach da”:

- Die leere Menge $\emptyset = \{\}$.
- Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Menge, die aus allen natürlichen Zahlen und der Null besteht, bezeichne ich mit $\mathbb{N}_0$.
- Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Sie enthält alle Brüche $\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind und $q \neq 0$ und $\frac{mp}{mq}$ mit $\frac{p}{q}$ identifiziert wird.
- Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wir werden sie in den nächsten Stunden genauer beschreiben.

2.2 Bemerkung. Man kann Mengen definieren durch

- Aufzählung ihrer Elemente innerhalb von Mengenklammern

Beispiel: Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung $x^2 + 2x = 0$ ist $\{-2, 0\}$

- Beschreibung durch Angabe der Eigenschaft der Elemente der Menge

Beispiel: $P = \{m \in \mathbb{N} \mid m \neq 1 \text{ und } m \text{ hat nur die Teiler } 1 \text{ und } m\}$

Statt $|$ verwenden manche Autoren auch den Doppelpunkt :

2.3 Definition. Wenn x Element von M ist, dann schreibt man $x \in M$ (lies “ x in M ”).

Wenn M und N Mengen sind und jedes Element von N auch Element von M ist, dann schreibt man $N \subseteq M$. Man sagt, N sei eine *Teilmenge* von M bzw. M eine *Obermenge* von N .

2.4 Bemerkung. (a) $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

2 Naive Mengenlehre

(b) Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$.

2.5 Definition. Die folgenden Mengenoperationen werden definiert

$$\begin{array}{ll} \text{Vereinigung} & M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} \\ \text{Durchschnitt} & M \cap N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} \\ \text{Mengendifferenz} & M \setminus N = \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\} \end{array}$$

2.6 Beispiel. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbb{N}$.

2.7 Satz. Es seien A , B und C Teilmengen von X . Dann gelten

(a) (Assoziativgesetze)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(b) (Kommutativitätsgesetze)

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$$

(c) (Distributivgesetze)

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

(d) (Formeln von De Morgan)

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B), \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

2.8 Definition. Es seien X und Y zwei Mengen. Die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$ ist das *kartesische Produkt* von X mit Y , geschrieben $X \times Y$. Anstelle von $X \times X$ schreibt man oft X^2 .

Höhere Produkte definiert man sukzessive, also $A \times B \times C = (A \times B) \times C$, schreibt die Elemente von $A \times B \times C$ dann aber in der Form (a, b, c) .

2.9 Beispiel. $\{0, 1\} \times \{2, 3, 4\} = \{(0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$.

2.10 Definition. Wenn M eine Menge ist, dann bildet die Menge ihrer Teilmengen die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

2.11 Beispiel. (a) $X = \{1, 2, 3\}$, dann hat $\mathcal{P}(X)$ die folgenden acht Elemente:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, X.$$

(b) $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Achtung: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

2.12 Definition. Gegeben seien Mengen X und Y . Eine *Abbildung* $f: X \rightarrow Y$ besteht aus dem *Definitionsbereich* X , dem *Zielbereich* Y und einer Vorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element $y = f(x)$ aus Y zuordnet.

Man schreibt auch $z \mapsto f(z)$, um die Zuordnungsvorschrift zu notieren.

2.13 Beispiel. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $f: X \rightarrow Y$, $x \mapsto x^2$.

2.14 Definition. Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung, seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$.

(a) $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ heißt *Bild* von M unter f .

(b) $f^{-1}(N) = \{x \mid f(x) \in N\}$ heißt *Urbild* von N unter f .

(c) Für $y \in Y$ schreibt man häufig $f^{-1}(y)$ anstatt $f^{-1}(\{y\})$.

2.15 Beispiel. Sei f die Abbildung aus Beispiel 2.13 und seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Dann $f(A) = \{1, 4\}$, $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$ und $f^{-1}(5) = \emptyset$.

2.16 Definition. Seien $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen. Die *Verknüpfung* ist definiert als $g \circ f: X \rightarrow Z$, $g \circ f(x) = g(f(x))$.

2.17 Beispiel. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Dann

$$f \circ f(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 + 1} = \frac{(x^2+1)^2}{1 + (x^2+1)^2} = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{x^4 + 2x^2 + 2}.$$

3 Ganze Zahlen und vollständige Induktion

Das Prinzip der *vollständigen Induktion* besagt:

Wenn eine von einer natürlichen Zahl abhängige Aussage $A(n)$ für $n = 1$ zutrifft und für jedes n die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ gilt, dann gilt $A(n)$ für alle n .

3.1 Bemerkung. Ein Induktionsbeweis besteht also aus zwei Teilen:

- Dem *Induktionsanfang*, in dem die Behauptung für $n = 1$ gezeigt wird
- Dem *Induktionsschluss*, in dem gezeigt wird, dass aus der Richtigkeit der Behauptung für n die Richtigkeit für $n + 1$ folgt. Die *Induktionsannahme* ist dann die Behauptung für n .

3.2 Bemerkung. Wenn die Behauptung erst ab einem n_0 gezeigt werden soll, dann startet man die Induktion bei diesem n_0 .

3.3 Satz. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die linke Seite gleich 1 und die rechte gleich $\frac{1 \cdot 2}{2}$. Also sind sie gleich.

Induktionsschluss: Die Aussage sei richtig für n . Dann

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}, \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt die Induktionsannahme verwendet wird. □

3.4 Satz. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 5$ gilt*

$$2^n > n^2,$$

Die Definition durch Rekursion funktioniert analog:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wollen wir a_n definieren. Das kann man in zwei Schritten tun:

- Zuerst definiert man a_1 .

- Sind $a_1, \dots, a_n$ bereits gegeben, so definiert man a_{n+1} unter Verwendung von $a_1, \dots, a_n$.

3.5 Beispiel. (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir die *Fakultät* $n!$ rekursiv durch $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ definieren wir $\sum_{j=1}^n$ rekursiv wie folgt:

$$\sum_{j=1}^1 a_j = a_1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} + \sum_{j=1}^n a_j.$$

(c) Analog definieren wir

$$\prod_{j=1}^1 a_j = a_1, \quad \prod_{j=1}^{n+1} a_j = a_{n+1} \cdot \prod_{j=1}^n a_j.$$

(d) Dann $n! = \prod_{j=1}^n j$.

(e) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ definieren wir x^k durch Rekursion nach k :

$$x^0 = 1, \quad x^{k+1} = x \cdot x^k.$$

4 Die reellen Zahlen

Die *reellen Zahlen* sind eine Menge $\mathbb{R}$ zusammen mit zwei Rechenvorschriften, die je zwei Elementen $x, y \in \mathbb{R}$ ein Element $x + y \in \mathbb{R}$ und ein Element $x \cdot y \in \mathbb{R}$ zuordnen, und einer Vergleichsrelation $>$, so dass die in den nächsten drei Unterabschnitten angegebenen Axiome erfüllt sind.

4.1 Körperaxiome

- (a) (Kommutativgesetze) $x + y = y + x$ und $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) (Assoziativgesetze) $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (c) (Null und Eins) Es gibt Elemente $0, 1 \in \mathbb{R}$ mit $0 \neq 1$ und $0 + x = x$ und $1 \cdot x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (d) (Inverses Element der Addition) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$ mit $x + y = 0$.
Es zeigt sich, dass y eindeutig bestimmt ist; man bezeichnet es mit $-x$.
- (e) (Inverses Element der Multiplikation) Zu jedem $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot z = 1$.
Es zeigt sich, dass z eindeutig bestimmt ist. Man bezeichnet es mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$.
- (f) (Distributivgesetz) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$.

4.1 Satz. *Das Nullelement ist eindeutig.*

4.2 Satz. *Das Einselement ist eindeutig.*

4.3 Satz. *Das additiv Inverse und das multiplikativ Inverse sind eindeutig.*

Beweis. Zur Abwechslung für die Multiplikation. Sei $x \neq 0$ und seien $w, z \in \mathbb{R}$ Elemente mit $x \cdot w = 1 = z \cdot w$. Dann

$$w = 1 \cdot w = w \cdot 1 = w \cdot (x \cdot z) = (w \cdot x) \cdot z = (x \cdot w) \cdot z = 1 \cdot z = z. \quad \square$$

4.4 Satz. $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt dann

4.5 Satz. $(-1) \cdot x = -x$.

4.6 Satz. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gelten $x^{-1} \neq 0$ und $(x^{-1})^{-1} = x$.

4.7 Korollar. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

4.8 Satz (Nullteilerfreiheit). Wenn $x \cdot y = 0$, dann $x = 0$ oder $y = 0$.

Arithmetische Beziehungen, die man durch bloßes Ausrechnen nachweist, wie etwa die binomischen Formeln, werden in der Vorlesung nicht noch einmal bewiesen.

4.2 Anordnungsaxiome

Es gibt eine Teilmenge P von $\mathbb{R}$, welche die beiden folgenden Axiome erfüllt:

(a) (Trichotomie) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten

$$x \in P, x = 0 \text{ oder } -x \in P$$

(b) (Abgeschlossenheit bezüglich Addition und Multiplikation) Sind x und y in P , dann auch $x + y$ und $x \cdot y$.

Statt $x \in P$ schreibt man $x > 0$, statt $-x \in P$ schreibt man $x < 0$. Ferner schreibt man $x < y$, falls $y - x > 0$, und $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$. Analog definiert man $>$ und $\geq$.

Falls $x > 0$, so heißt x *positiv*, falls $x < 0$, so heißt x *negativ*.

4.9 Satz. Seien $x, y > 0$, $u, v < 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Dann gelten

(a) $xy > 0$,

(b) $uv > 0$,

(c) $xu < 0$,

(d) $z^2 \geq 0$,

(e) $z^2 > 0$, vorausgesetzt $z \neq 0$,

(f) $1 > 0$,

(g) $x^{-1} > 0$,

(h) $u^{-1} < 0$.

4.10 Satz. Falls $x < y$ und $z \in \mathbb{R}$ beliebig, so gilt $x + z < y + z$.

4 Die reellen Zahlen

4.11 Satz. (a) Falls $x < y$ und $z > 0$, so gilt $xz < yz$.

(b) Falls $x < y$ und $z < 0$, so gilt $xz > yz$.

4.12 Satz. Ist $0 < x < y$, so gilt $x^2 < y^2$.

Sind umgekehrt x und y beide positiv und ist $x^2 < y^2$, so folgt $x < y$.

4.13 Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definiert man den *Absolutbetrag* als

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

4.14 Satz. Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x \cdot y| = |x||y|$.

4.15 Beispiel. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|3x - 6| = |8 - x|$.

Es gibt zwei Fälle: Im ersten Fall lautet die Gleichung $3x - 6 = 8 - x$, ihre Lösung ist $x = \frac{7}{2}$, im zweiten lautet sie $3x - 6 = -(8 - x)$ mit der Lösung $x = -1$.

Die beiden Lösungen der Gleichung sind also $x = \frac{7}{2}$ und $x = -1$.

4.16 Satz (Dreiecksungleichung). Sind $x, y \in \mathbb{R}$, so gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$.

4.3 Vollständigkeitsaxiom

4.17 Satz. Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

4.18 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt M *nach oben beschränkt*, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq c$ für alle $x \in M$. Jedes c mit dieser Eigenschaft heißt *obere Schranke* von M .

M heißt *nach unten beschränkt*, wenn es ein $d \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \geq d$ für alle $x \in M$. Jedes d mit dieser Eigenschaft heißt *untere Schranke* von M .

M heißt *beschränkt*, wenn es nach oben und unten beschränkt ist.

4.19 Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$. Dann ist M beschränkt. Eine obere Schranke ist $c = \frac{3}{2}$ und eine untere Schranke ist $-\frac{3}{2}$.

4.20 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es ein $c \in M$ gibt, welches obere Schranke von M ist, so bezeichnet man c als das *Maximum* von M , in Zeichen $c = \max M$. In diesem Fall ist c das größte Element von M . Wenn M ein kleinstes Element hat, so bezeichnet man es als *Minimum* und schreibt $\min M$ dafür.

4.21 Definition. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn es eine kleinste obere Schranke von M gibt, dann bezeichnet man sie als *Supremum* von M , in Zeichen $\sup M$. Wenn es eine größte untere Schranke gibt, so bezeichnet man sie als *Infimum* von M , in Zeichen $\inf M$.

Beispiel. (a) Sei $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist M nach oben und unten beschränkt und besitzt kein Maximum. Ferner gilt $\inf M = \min M = 0$. Wir werden später sehen, dass $\sup M = 1$.

(b) Sei $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Wir planen, $\sqrt{2}$ als $\sup M$ zu definieren. Dazu müssen wir sicherstellen, dass es das Supremum gibt.

4.22 Satz. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. Für $c \in \mathbb{R}$ sind äquivalent:

- (a) $c = \sup M$.
- (b) c ist obere Schranke von M und kein $d < c$ ist ebenfalls obere Schranke von M .
- (c) Für alle $x \in M$ gilt $x \leq c$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $x > c - \epsilon$.

4.23 Vollständigkeitsaxiom. Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

4.24 Bemerkung. $M \subseteq \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt. M besitzt genau dann ein Maximum, wenn $\sup M \in M$. In diesem Fall $\max M = \sup M$. Die analoge Aussage für das Minimum gilt ebenfalls.

4.25 Satz. Zu jedem $a > 0$ existiert genau ein $b > 0$ mit $b^2 = a$.

Dieses b heißt Quadratwurzel von a , in Zeichen $b = \sqrt{a}$.

4.26 Definition. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ definieren wir die folgenden Intervalle:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} &]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} &]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} &]a, \infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}. \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} &]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{aligned}$$

4.27 Beispiel. $\{x \in \mathbb{R} \mid x - x^2 \leq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, \infty[$.

Es ist nämlich $x - x^2 = x(1 - x)$ genau dann ≤ 0 , wenn einer der Faktoren ≥ 0 und der andere ≤ 0 ist.

4.28 Satz (Archimedisches Axiom). Ist $a \in \mathbb{R}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

4.29 Satz (Eudoxos). Zu jedem $b > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < b$.

4.30 Beispiel. Für $M = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt $\sup M = 1$.

Ausblick

Zwei verschiedene Methoden, die reellen Zahlen aus den rationalen zu konstruieren, findet man in §15 des Buchs von Kavallo.

In der älteren der beiden Methoden sind die reellen Zahlen die *Dedekindschen Schnitte*. Ein Dedekindscher Schnitt S ist eine Teilmenge der rationalen Zahlen mit folgenden drei Eigenschaften

- (a) $S \neq \emptyset$ und $S \neq \mathbb{Q}$,
- (b) wenn $x \in S$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $y < x$, dann $y \in S$,
- (c) zu jedem $x \in S$ gibt es ein $z \in S$ mit $z > x$,

Dann entspricht 2 dem Schnitt $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$ und $\sqrt{2}$ entspricht dem Schnitt $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ oder } x^2 < 2\}$.

5 Folgen und ihre Grenzwerte

5.1 Satz (Bernoulli-Ungleichung). Für $h > -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1 + h)^n \geq 1 + nh$.

5.2 Satz (Arithmetische und geometrische Progression). :

$$(a) \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

5.3 Definition. Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert man den *Binomialkoeffizienten* durch

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5.4 Satz. Für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Insbesondere sind alle Binomialkoeffizienten ganz.

5.5 Satz (Binomischer Lehrsatz). Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

5.6 Definition. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

5.7 Beispiel. (a) Für jedes $a \neq 0$ ist die Folge $(a \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.

(b) Für jedes $q \in [-1, 1]$ ist die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch -1 und nach oben durch 1 .

(c) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(nq^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

5 Folgen und ihre Grenzwerte

(d) Für jedes $q \in]-1, 1[$ ist die Folge $(n^2 q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

5.8 Definition. (a) Eine *Folge* in einer Menge M ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow M$, welche man in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schreibt.

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, und sei $b \in \mathbb{R}$. Die Folge heißt *konvergent* gegen b , falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt
 $|a_n - b| < \epsilon$.

Man sagt dann, b sei der *Grenzwert* der Folge, und schreibt $b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $a_n \rightarrow b$.

Eine Folge heißt *divergent*, wenn sie keinen Grenzwert besitzt.

5.9 Beispiel. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2}$. Da wir noch keine Rechenregeln für Grenzwerte haben, beweisen wir die Konvergenz zu Fuß.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{N} < 4\epsilon$. Dann gilt für jedes $n \geq N$

$$\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n+2 - (2n+3)}{4n+6} \right| = \frac{1}{4n+6} \leq \frac{1}{4N} < \epsilon.$$

5.10 Satz. Eine Folge besitzt höchstens einen Grenzwert.

5.11 Satz. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

5.12 Satz (Sandwichsatz). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Wenn die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert L konvergieren, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

5.13 Beispiel. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$.

(i) Falls $|q| < 1$, so gilt $\lim q^n = 0$.

(ii) Falls $|q| > 1$, so divergiert die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$.

(iv) Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

5.14 Bemerkung. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ heißt *Nullfolge*.

5.15 Satz (Rechenregeln). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$.

(d) Ist $b \neq 0$, dann $b_n \neq 0$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

5.16 Beispiel. Sei $q \in]-1, 1[$. Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 q^n = 0$.

5.17 Beispiel.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{n}{4})(1 + \frac{n}{4})}{n^2 + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 (\frac{1}{n} - \frac{1}{4})(\frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{n^2 (1 + \frac{3}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{1}{n} - \frac{1}{4})(\frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{1 + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{4}) \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{4})}{1 + 3 (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n})^2} = -\frac{1}{16}. \end{aligned}$$

5.18 Satz. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann $a \leq b$.

5.19 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie heißt *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Analog definiert man (streng) monoton fallend.

5.20 Satz. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, so konvergiert die Folge und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt, so konvergiert die Folge ebenfalls und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

5.21 Beispiel. Sei $x > 0$. Wähle ein beliebiges $a_1 > 0$ mit $xa_1 < 1$ und definiere rekursiv $a_{n+1} = 2a_n - xa_n^2$. Dann gilt $\lim a_n = 1/x$.

Beweis. Wir zeigen mit vollständiger Induktion für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq 1/x.$$

Dann folgt die Existenz eines Grenzwerts b aus dem vorigen Satz. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt $b = 2b - xb^2$. Also $b = 0$ oder $1 = 2 - xb$. Der erste Fall scheidet aus, denn $b \geq a_1 > 0$ wegen der Monotonie. Also $b = 1/x$. $\square$

5.22 Definition. Sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$. Ist ferner $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, so ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel. Sei $a_n = (-1)^n$, und sei $n_k = 2k$. Dann $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (1)_{k \in \mathbb{N}}$.

5.23 Satz. Jede Teilfolge einer beschränkten Folge ist beschränkt und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ist konvergent.

5.24 Theorem (Satz von Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

5 Folgen und ihre Grenzwerte

5.25 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \epsilon$ für alle $n, m \geq N$.

5.26 Theorem (Konvergenzkriterium von Cauchy). *Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sind äquivalent:*

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

5.27 Beispiele. (a) Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn für jedes n gilt $|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$.

- (b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$. Dann konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Den Grenzwert bezeichnet man als *Eulersche Zahl* e

6 Reihen

6.1 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und sei $s_n = \sum_{j=1}^n a_j$. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet man als Folge der *Partialsummen*.

Wenn die Folge der Partialsummen konvergiert, dann sagt man, dass die *Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert und schreibt $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ für ihren Grenzwert. Wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert, so sagt man, dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergiert.

6.2 Satz. Wenn $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Die Umkehrung gilt i. a. nicht.

6.3 Beispiel. Sei $q \in \mathbb{R}$. Die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergiert für $|q| \geq 1$. Ansonsten gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1.$$

6.4 Beispiel. Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

6.5 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+10}$ divergiert.

6.6 Satz. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

6.7 Korollar. für $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$.

6.8 Satz (Konvergenzkriterium von Leibniz). Sei $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$. Ferner gilt

$$b_1 - b_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \leq b_1.$$

6.9 Beispiel. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergiert und es gilt

$$1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq \frac{1}{2}.$$

Wir werden später sehen, dass die Reihe gegen $\ln 2$ konvergiert.

6.10 Bemerkung. Mit der folgender Methode erhalten wir bessere Einschließungen:
Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{7}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}.$$

6 Reihen

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+4}$ erfüllt ebenfalls das Konvergenzkriterium von Leibniz. Daher liegt ihr Reihenwert zwischen $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ und $\frac{1}{5}$. Insgesamt folgt

$$\frac{7}{12} + \frac{1}{30} = \frac{37}{60} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq \frac{7}{12} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}.$$

6.11 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

6.12 Satz. *Absolut konvergente Reihen sind konvergent.*

6.13 Bemerkung. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

6.14 Satz (Majorantenkriterium). *Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $|a_n| \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.*

6.15 Bemerkung. (a) Man bezeichnet dann $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ als *konvergente Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Eine Umformulierung des Majorantenkriteriums liefert: Wenn $|a_n| \leq c_n$ für jedes n und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. In diesem Falle bezeichnet man $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ als *divergente Minorante*.

6.16 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$ divergiert. Für $n \geq 3$ gilt nämlich $5 \leq n^2$ und daher

$$\frac{n}{n^2+5} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}.$$

Daher ist die Hälfte der harmonischen Reihe eine divergente Minorante.

6.17 Satz (Quotientenkriterium). *Es gebe ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $q \in \mathbb{R}$ mit $q < 1$, so dass $a_n \neq 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq N$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.*

6.18 Korollar. *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass $a_n \neq 0$ für fast alle n und so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} =: q$ existiert.*

(a) *Falls $q < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.*

(b) *Falls $q > 1$, so divergiert die Reihe.*

6.19 Beispiel. (a) Im Fall $q = 1$ sind feinere Untersuchungen notwendig. Zu diesem Fall gehören sowohl die harmonische Reihe als auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ konvergiert. Es gilt nämlich

$$\frac{\frac{(n+1)^4}{4^{n+1}}}{\frac{n^4}{4^n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{4} < 1.$$

6.20 Definition. Die *Exponentialfunktion* ist definiert durch

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Das Quotientenkriterium zeigt, dass diese Reihe in der Tat konvergiert.

6.21 Beispiel. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \pm \dots$ ist konvergent und hat die Summe 0. Die Umordnung

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \dots$$

ist divergent. Man kann zeigen: Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, dann gibt es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ eine Permutation σ von $\mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = r$. Das ist Aufgabe 32.6 aus dem Buch von Kabbalo.

6.22 Satz (Umordnungssatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe und σ eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf sich. Setze $b_n = a_{\sigma(n)}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6.23 Satz (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und sei

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}.$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

6.24 Satz (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

6.25 Korollar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ und speziell $\exp(x) > 0$.

7 Dezimaldarstellung

7.1 Bemerkung. Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\{0, 1, \dots, 9\} = Z$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n}$ gegen eine Zahl in $[0, 1]$. Das folgt aus dem Majorantenkriterium mit der Majorante $9 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n}$.

7.2 Lemma. Ist X die Menge aller Folgen in Z und definiert man

$$\varphi: X \rightarrow [0, 1], \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} c_n 10^{-n},$$

so ist φ surjektiv.

7.3 Beispiel. Zum Beispiel ist $\varphi(1, 6, 6, \dots) = \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \frac{1}{1-1/10} = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{9} = \frac{1}{6}$.

7.4 Bemerkung. Ist $n \in \mathbb{N}$ und $c = (c_1, \dots, c_n, 9, 9, 9, \dots)$ mit $c_n < 9$, so gilt

$$\varphi(c) = \varphi(c_1, \dots, c_{n-1}, 1 + c_n, 0, 0, 0, \dots).$$

7.5 Satz. Sei $Y = \{(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X \mid \text{für unendlich viele } n \text{ ist } c_n \neq 9\}$, dann erhält man eine Bijektion

$$\psi: Y \rightarrow [0, 1[, \quad (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \varphi((c_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

8 Stetige Funktionen

8.1 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $x_0 \in I$. Dann heißt f *stetig in x_0* , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass gilt: Ist $x \in I$ und $|x - x_0| < \delta$, dann $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Eine Funktion heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

8.2 Bemerkung. Das Zeichen " $\forall x \in X$ " bedeutet "für alle $x \in X$ " und das Zeichen " $\exists y \in Y$ " bedeutet "es gibt ein $y \in Y$ ".

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in I$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Entsprechend ist f unstetig in x_0 , wenn

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in I: |x - x_0| < \delta \text{ und } |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

8.3 Beispiel. (a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig.

(b) Konstante Funktionen sind stetig.

(c) Definiere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dann ist f unstetig in $x_0 = 0$.

8.4 Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $a \in I$ und sei $f: I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ die Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$ gilt.

8.5 Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $a \in I$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig in a .

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

8.6 Satz. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a . Dann sind auch die folgenden Funktionen stetig in a :

8 Stetige Funktionen

- (a) $f + g$ mit $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- (b) $f - g$ und $f \cdot g$, die ebenfalls punktweise definiert sind.
- (c) Falls $g(a) \neq 0$, so ist auch f/g stetig in a .

8.7 Definition. Eine Funktion der Form $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$, heißt *Polynom*.

Sind p, q zwei Polynome, wobei q nicht das Nullpolynom ist, und ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$, so bezeichnet man die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

als *gebrochen-rationale Funktion*.

8.8 Bemerkung. Wegen Satz 8.6 sind Polynome und gebrochen-rationale Funktionen stetig auf ihrem Definitionsbereich.

Literatur

- [For13] Otto Forster. *Analysis 2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, gewöhnliche Differentialgleichungen*. German. 10th revised ed. Grundkurs Math. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. ISBN: 978-3-658-02356-0; 978-3-658-02357-7. DOI: [10.1007/978-3-658-02357-7](https://doi.org/10.1007/978-3-658-02357-7).
- [For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. German. 12th edition. Grundkurs Math. Heidelberg: Springer Spektrum, 2016. ISBN: 978-3-658-11544-9; 978-3-658-11545-6. DOI: [10.1007/978-3-658-11545-6](https://doi.org/10.1007/978-3-658-11545-6).
- [Kab00] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis I*. German. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 2000. ISBN: 3-8274-1033-9.
- [Kab97] Winfried Kaballo. *Einführung in die Analysis II*. German. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag, 1997. ISBN: 3-8274-0198-4.
- [SS18] Hermann Schichl und Roland Steinbauer. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. German. 3rd edition. Heidelberg: Springer Spektrum, 2018. ISBN: 978-3-662-56805-7. DOI: [10.1007/978-3-662-56805-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-56805-7).