Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 10.12.2019

Blatt 10

Übungen zur Analysis II

1. Die Legendresche Differentialgleichung ist
$$y'' = \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y \quad \text{für } -1 < x < 1.$$
   (a) (1P) Überprüfen Sie, dass $\varphi_1(x) = x$ eine Lösung ist.
   (b) (7P) Verwenden Sie das d'Alembertsche Reduktionsverfahren, um auf dem Intervall $]0,1[$ eine zu φ_1 linear unabhängige Lösung φ_2 zu finden.
   (c) (2P) Zeigen Sie, dass sich φ_2 als Funktion auf $]-1,1[$ auffassen lässt und dort die Legendresche Differentialgleichung löst.

2. Betrachten Sie die inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$y'' = 6y' - 9y + e^{3x}.$$
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass durch $\varphi_1(x) = e^{3x}$ und $\varphi_2(x) = xe^{3x}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung gegeben wird.
   (b) (1P) Bestimmen Sie die Wronski-Determinante.
   (c) (7P) Geben Sie die Lösungsgesamtheit der inhomogenen linearen Differentialgleichung an.

3. Es seien
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) (2P) Berechnen Sie AB und BA.
   (b) (8P) Berechnen Sie $\exp(A+B)$ und $\exp(A)\exp(B)$.

   Hinweis: Für alle drei Matrizen kann die Exponentialabbildung direkt über die Exponentialreihe berechnet werden.

4. (2+3+5P) Für $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ und stetiges $b\colon\ ]0,\infty[\to \mathbb{K}$ bezeichnet man
$$y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{j-n} y^{(j)}(x) = b(x), \quad x > 0,$$
   als *Eulersche Differentialgleichung.* Zeigen Sie für $n = 1, 2, 3$, dass die Eulersche Differentialgleichung durch die Substitution $w(t) = y(e^t)$ in eine lineare Differentialgleichung übergeht. Geben Sie diese Differentialgleichung an, aber versuchen Sie nicht, sie zu lösen.

   Bemerkung: Man kann zeigen, dass die angegebene Substitution für alle n zu einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten führt.

Abgabe: Di, 17.12.2019, 12:20 **Besprechung:** 8.-9. Januar