Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 17.12.2019

Blatt 11

Übungen zur Analysis II

1. Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 + 6y_2, & y_1(0) &= -1, \\ y_2' &= -4y_1 + 5y_2, & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

   Gehen Sie dazu wie folgt vor

   (a) (1P) Schreiben Sie das System in Matrixschreibweise $y' = Ay$.

   (b) (4P) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

   (c) (3P) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem $(\varphi_1(x), \varphi_2(x))$.

   (d) (2P) Passen Sie die allgemeine Lösung an die Anfangsbedingung an.

2. (10P) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $g, h \colon J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Definieren Sie $f \colon J \times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = -g(x)y - h(x)y^\alpha$ und betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, also

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0. \qquad (1)$$

   Sie heißt *Bernoullische Differentialgleichung.*

   Zeigen Sie: Ist I ein offenes Intervall in J und $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\psi'(x) + (1 - \alpha)g(x)\psi(x) + (1 - \alpha)h(x) = 0 \qquad (2)$$

   und $\psi(x) > 0$ für alle $x \in I$ und ist

$$\varphi(x) = \psi(x)^{1/(1-\alpha)},$$

   so ist φ eine Lösung von (1).

   Ist umgekehrt φ eine Lösung von (1) mit positiven Werten, so erhält man durch $\psi = \varphi^{1-\alpha}$ eine Lösung von (2).

3. (10P) Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung

$$y' = \frac{8y}{x} + \frac{2}{x} y^{3/4}, \qquad (x, y) \in U =]0, \infty[\times]0, \infty[\,.$$

   Geben Sie für jede Lösung ihren maximalen Definitionsbereich an.

4. (10P) Die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators mit periodischer Anregung ist

$$y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x).$$

Es gelte $0 \leq \mu < \omega_0$. Berechnen Sie für alle Werte $\omega > 0$ die Lösungsgesamtheit.

Hinweis: Ansätze sind erlaubt. Bevor Sie durch Null teilen, betrachten Sie aber bitte unter `https://www.youtube.com/watch?v=moUfbNwHDTs` einen Film der Hochschule Heilbronn über die Resonanzkatastrophe.

Frohes Fest!

Abgabe: Di, 07.01.2020, 12:20 **Besprechung:** 15.-16. Januar