Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 07.01.2020

Blatt 12

Übungen zur Analysis II

1. Für die Funktionen $f_1, \ldots, f_4$ betrachten Sie bitte die Differentialgleichung
$$y''' + 2y'' + 2y' = f_j(x). \tag{1}$$
   (a) (3P) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
   (b) (2P+5P+2P+4P) Bestimmen Sie für $j = 1, \ldots, 4$ die Lösung von (1), wobei
$$f_1(x) = \cos x \qquad f_2(x) = e^{-x}\cos x,$$
$$f_3(x) = 1 \qquad f_4(x) = x.$$
   Hinweis: Verwenden Sie systematische Ansätze wie in Bemerkung 16.29.

2. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und es seien $g, h \colon U \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $h(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in U$. Die Differentialgleichung
$$y' = \frac{g(x,y)}{h(x,y)} \tag{2}$$
heißt *exakt,* wenn es $F \in C^1(U)$ gibt, so dass
$$g = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{und} \quad h = \frac{\partial F}{\partial y}.$$
Zeigen Sie in diesem Fall
   (a) (2P) Ist $\varphi \colon J \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2), so ist die Funktion $x \mapsto F(x, \varphi(x))$ konstant.
   (b) (2P) Ist $\varphi \colon J \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall J definierte, stetig differenzierbare Funktion, für welche die Funktion $x \mapsto F(x, \varphi(x))$ konstant ist, so ist φ eine Lösung von (2).
   (c) (6P) Bestimmen Sie nun die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung
$$y' = \frac{x-y}{x+y} \quad \text{in } U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > x\}.$$
   Hinweis: Die Funktion F kann man in diesem Fall leicht erraten, weil sie offenbar als Polynom in x und y gewählt werden kann.

3. Die Differentialgleichung des physikalischen Pendels ist
$$y'' = -\sin(y), \quad (x, y) \in U := \mathbb{R}^2.$$
Es sei $\psi \colon \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$ die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.
   (a) (2P) Schreiben Sie diese Differentialgleichung als System $Y' = f(x, Y)$ erster Ordnung.
   (b) (5P) Zeigen Sie, dass durch $\Phi \colon \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \binom{\sin x}{\cos x}$, eine Näherungslösung der Differentialgleichung aus (a) zur Näherung $\epsilon = \frac{1}{48}$ gegeben wird. Der $\mathbb{R}^2$ sei dabei mit der Maximumsnorm versehen.
   (c) (7P) Geben Sie nun konkrete Funktionen a und b an, so dass $a(x) \leq \psi(x) \leq b(x)$ für alle x mit $0 \leq x < \frac{1}{2}$ und $b\left(\frac{1}{2}\right) - a\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{20}$.
   Hinweis: Verwenden Sie den Satz über die Parameterabhängigkeit der Lösung.

Abgabe: Di, 14.01.2020, 12:20 **Besprechung:** 22.-23. Januar