Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 14.01.2020

Blatt 13

Übungen zur Analysis II

1. In der Vorlesung wurde die Räuber-Beute-Gleichung vorgestellt. Wenn x die Anzahl der Beutetiere, y die Anzahl der Raubtiere und $\dot{x}$ bzw. $\dot{y}$ die Zeitableitung bezeichnen, dann lautet sie
$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= -cy + dxy, \end{aligned}$$
wobei $a, b, c, d > 0$ Modellparameter sind.
   (a) (4P) Zeigen Sie: Für jede Wahl von a, b, c, d gibt es eine Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ mit $x_0, y_0 > 0$, so dass die Lösung der Räuber-Beute-Gleichung konstant ist.
   (b) (6P) Lösen Sie die Räuber-Beute-Gleichung für die beiden Spezialfälle, dass es nur Hasen bzw. nur Füchse gibt.

2. (10P) Es sei I ein offenes Intervall und es seien $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner gebe es $x_1 \in I$ mit $f(x) < g(x)$ für alle $x < x_1$. Zeigen Sie:
Entweder gilt $f < g$ in ganz I oder es gibt $x_2 \in I$ mit $f(x_2) = g(x_2)$ und $f'(x_2) \geq g'(x_2)$.

3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, es sei $x_0 \in I$, es sei $f \colon U \to \mathbb{R}$ stetig und es sei $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Ferner sei $\psi \colon I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $(x, \psi(x)) \in U$ für alle $x \in I$ und $\psi'(x) < f(x, \psi(x))$ für alle $x \in I$ mit $x \geq x_0$.
   (a) (3P) Es gelte $\psi(x_0) < \varphi(x_0)$. Zeigen Sie $\psi(x) < \varphi(x)$ für alle $x \geq x_0$.
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.
   (b) (7P) Es gelte $\psi(x_0) \leq \varphi(x_0)$. Zeigen Sie $\psi(x) < \varphi(x)$ für alle $x > x_0$.
   Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

4. (10P) Die elementarsymmetrischen Polynome in drei Veränderlichen sind gegeben durch
$$\sigma_1(x, y, z) = x + y + z, \quad \sigma_2(x, y, z) = xy + xz + yz, \quad \sigma_3(x, y, z) = xyz.$$
Wo ist die Abbildung $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \sigma_1(x,y,z) \\ \sigma_2(x,y,z) \\ \sigma_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ein lokaler C^∞-Diffeomorphismus?

Abgabe: Di, 21.01.2020, 12:20 **Besprechung:** 29.-30. Januar