Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 22.10.2019

Blatt 3

Übungen zur Analysis II

1. Geben Sie für jede der folgenden Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ an, ob sie stetig sind. Hierbei ist $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}$. Begründen Sie Ihr Ergebnis.

   (a) (2P) $\quad U = \mathbb{R}^3, \quad m = 3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(xy) \\ \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ |x-y-z| \end{pmatrix},$

   (b) (3P) $\quad U = D, \quad m = 1, \quad f(x,y) = \dfrac{2x}{\sqrt{8-x-y}}$

   (c) (2P) $\quad U = \mathbb{R}^2, \quad m = 1, \quad f(x,y) = \begin{cases} xy, & xy \geq 0, \\ \dfrac{x}{y}, & xy < 0, \end{cases}$

   (d) (3P) $\quad U = \mathbb{R}^2, \quad m = 1, \quad f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x-y}\right), & x < y, \\ 0, & x \geq y. \end{cases}$

   Hinweis: Bei Teil (b) hilft die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

2. Es sei $F\colon\ ]0,\infty[\, \times\,]-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $F(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, die Polarkoordinatenabbildung.
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass F stetig ist.
   (b) (8P) Die Abbildung F ist bijektiv (das wurde in der Analysis I gezeigt). Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung nicht stetig ist.

3. (10P) Für $n, m \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A = (a_{k,j})_{\substack{k=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n,m}$ sei eine lineare Abbildung $f\colon (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ gegeben durch $f(x) := Ax$. Bestimmen Sie die Matrixnorm.

4. Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ setzen wir $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$. Es seien
   $$A := \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| xy = 1\right\}.$$
   (a) (3P) Zeigen Sie, dass A und B abgeschlossen sind.
   (b) (7P) Zeigen Sie, dass $A + B$ nicht abgeschlossen ist.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.O0.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

Abgabe: Di, 29.10.2019, 12:20 **Besprechung:** 6.–7. November