Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 29.10.2019
Blatt 4

Übungen zur Analysis II

1. Gegeben seien die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Bestimmen Sie jeweils für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktionalmatrix.

   (a) (2P) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = \begin{pmatrix} x\cos(x) \\ x\sin(x) \end{pmatrix}$.

   (b) (2P) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)e^{x_1}$.

   (c) (2P) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_3 e^{x_1 x_2} \\ \ln(1 + x_1^2 x_3^2) \end{pmatrix}$.

   (d) (4P) Bestimmen Sie alle vier zweiten partiellen Ableitungen von g.

2. (a) (4P) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

   $$f(t) = \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

   differenzierbar ist.

   (b) (6P) Zeigen Sie, dass ihre Ableitung unstetig in 0 ist.

3. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

   $$f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   (a) (4P) Bestimmen Sie

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$$

   für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

   (b) (4P) Zeigen Sie, dass f von der Klasse C^1 ist.

   (c) (2P) Zeigen Sie

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0, 0).$$

4. (10P) Gegeben sei die Abbildung

   $$f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto A^3.$$

   Zeigen Sie ihre totale Differenzierbarkeit und bestimmen Sie $f'(A)$ für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Abgabe: Di, 05.11.2019, 12:20

Besprechung: 13.–14. November