Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 05.11.2019

Blatt 5

# Übungen zur Analysis II

1. (10P) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^{n+n} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x,y) = x \cdot y$, wobei $x \cdot y$ das Skalarprodukt bezeichnet. Bestimmen Sie $f'(x,y)$.

2. Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^4y - xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass $f$ stetig in $(0,0)$ ist.
   
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert.
   
   (c) (3P) Ist $f$ von der Klasse $C^1$?
   *Hinweis:* Verwenden Sie Satz 6.13.

3. Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) (4P) Zeigen Sie, dass $f$ stetig in $(0,0)$ ist.
   
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ die Richtungsableitung $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ existiert.
   
   (c) (2P) Für $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t)$ sei $g(t) = f(\gamma(t))$. Zeigen Sie, dass $g'(0)$ existiert und geben Sie diesen Wert an.
   
   (d) (1P) Bestimmen Sie $Df(0,0) \circ \gamma'(0)$ und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von (c).
   
   (e) (1P) Ist $f$ von der Klasse $C^1$?

4. (10P) Es sei $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ die Determinante. Da sie ein Polynom ist, ist klar, dass sie total differenzierbar ist. Zeigen Sie

$$\det{}'(a_1,\ldots,a_n)(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{j=1}^{n} \det(a_1,\ldots,a_{j-1},h_j,a_{j+1},\ldots,a_n).$$

**Abgabe:** Di, 12.11.2019, 12:20 **Besprechung:** 20.–21. November