Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 12.11.2019
Blatt 6

Übungen zur Analysis II

1. (10P) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vierter Ordnung für die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x_1 \sin(x_1 - x_1 x_2)\,,$$
im Punkt $(0, 0)$.

   Hinweis: Verwenden Sie Satz 8.12. Die Reihenentwicklung des Sinus kennen Sie. Das Taylorpolynom der Ordnung k im Punkt x ist erklärt als
$$P_k(\xi) := \sum_{|\alpha| \le k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} (\xi - x)^\alpha.$$

2. (10P) Gegeben seien ein Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = k$ und eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für jedes $f, g \in C^k(U)$ die *Leibniz-Regel*
$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f\, D^{\alpha-\beta} g,$$
wobei $\alpha \ge \beta$ genau dann, wenn $\beta_j \le \alpha_j$ für $j = 1, \dots, n$, und der Binomialkoeffizient definiert ist durch
$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}.$$

3. (10P) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren von
$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. (10P) Es sei
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$
eine reelle, symmetrische (2×2)-Matrix. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Hurwitz, dass M genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $\det M > 0$.

   Hinweis: Verwenden Sie quadratische Ergänzung.

Abgabe: Di, 19.11.2019, 12:20

Besprechung: 21.–22. November