Übungen zur Analysis II

1. (10P) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der Funktion
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = y^3 - 3x^2y - x^3 + 9y^2.$$
Geben Sie für jede kritische Stelle an, ob dort ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder ein Sattel vorliegt.

2. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - x + y + 2.$$
   (a) (4P) Bestimmen Sie die kritischen Stellen und die lokalen Extrema von f.

   (b) (6P) Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf der Menge
$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty \leq 1\}.$$
Hinweis: Bei (b) muss ∂Q gesondert betrachtet werden. Dazu muss der Rand parametrisiert werden, beispielsweise wie folgt
$$\partial Q = \{(t,-1) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(1,t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t,1) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(-1,t) \mid -1 \leq t \leq 1\}.$$

3. (10P) Der stetig differenzierbare Weg $\alpha\colon [0,6\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch
$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^{6t}\cos(7t) \\ e^{6t}\sin(7t) \\ e^{6t} \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Weglänge von α.

4. (10P) Zeigen Sie, dass der Weg
$$\alpha\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ t\sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{pmatrix}, & t > 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), & t = 0, \end{cases}$$
nicht rektifizierbar ist.

Abgabe: Di, 26.11.2019, 12:20 **Besprechung:** 4.-5. Dezember