Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 03.12.2019

Blatt 9

Übungen zur Analysis II

1. (10P) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe
$$y' = -\frac{y}{x} + e^{2x}, \quad y(1) = 0.$$
Was ist der maximale Definitionsbereich der Lösung?

2. Betrachten Sie die Differentialgleichung
$$y' = e^y \cos(x), \quad (x, y) \in U := \mathbb{R}^2.$$
   (a) (1P) Erfüllt die Differentialgleichung die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf?
   (b) (4P) Bestimmen Sie für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der Anfangswertaufgabe
$$y' = e^y \cos(x), \quad y(0) = y_0.$$
   (c) (3P) Geben Sie sämtliche Werte y_0 an, für welche die Anfangswertaufgabe eine auf $\mathbb{R}$ definierte Lösung besitzt.
   (d) (2P) Geben Sie das größte Intervall an, auf dem die Anfangsbedingung
$$y(0) = \ln 2$$
eine Lösung besitzt.

3. (10P) Auf $U =]0, \infty[\times \mathbb{R}$ sei die Anfangswertaufgabe
$$y' = \frac{y}{x} - \exp\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(e) = 0$$
gegeben. Bestimmen Sie die Lösung, indem Sie den Ansatz $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ machen und die Differentialgleichung für u lösen.
Hinweis: Eine Differentialgleichung, bei der y' durch eine Funktion von $\frac{y}{x}$ ausgedrückt wird, heißt *homogene Differentialgleichung.*

4. Für $x \in]0, \infty[$ sei
$$A(x) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix}.$$
   (a) (8P) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das lineare Differentialgleichungssystem $y' = A(x)y$.
   Hinweis: Man muss die spezielle Struktur des Differentialgleichungssystems ausnutzen.
   (b) (2P) Bestimmen Sie ferner eine Lösung für die Anfangsbedingung $y(1) = \binom{0}{-1}$.

Abgabe: Di, 10.12.2019, 12:20 **Besprechung:** 18.-19. Dezember