Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 10.12.2019

Blatt 10

Übungen zur Analysis III

1. Es sei
$$Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \|(x,y)\|_2 = 1\right\}$$
der Kreiszylinder.
   (a) (5P) Zeigen Sie, dass Z eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist, indem Sie die Bedingungen aus Definition 14.1 nachweisen. Was ist seine Dimension?
   (b) (5P) Geben Sie für jedes $a \in Z$ eine Karte an.

2. (10P) Es sei
$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(x^2+y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3 = 0\right\}$$
die Kleeblattschlinge. Zeigen Sie, dass einen Punkt $a \in K$ gibt, so dass $K \setminus \{a\}$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit ist.

   Hinweis: Dass die Kleeblattschlinge einen Punkt enthält, in dessen Umgebung sie tatsächlich keine Mannigfaltigkeit ist, zeigen Sie auf dem Weihnachtsblatt.

3. (10P) Es sei $k > 0$ vorgegeben. Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren das Maximum
$$\max\{f(a,b,c) \mid a,b,c > 0, a+b+c = 2k\},$$
wobei
$$f(a,b,c) = k(k-a)(k-b)(k-c).$$

4. (10P) Bestimmen Sie den Abstand des Ellipsoids
$$E = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2+b^2+4c^2 = 16\}$$
von der Fläche
$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 16\}.$$

   Hinweis: Auch dies ist eine Extremalaufgabe unter Nebenbedingungen.

Abgabe: Di, 17.12.2019, 10:20 **Besprechung:** 8. und 9. Januar