Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 17.12.2019
Blatt 11

Übungen zur Analysis III

1. (10P) Es sei σ des Lebesguemaß auf der $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \middle| \|x\|_2 = 1\right\}$. Bestimmen Sie $\sigma(S^2)$, indem Sie einen der beiden Atlanten aus Beispiel 14.10 verwenden.

   Hinweis: Es kann nützlich sein, Satz 16.17 zu verwenden.

2. Gegeben seien die beiden folgenden offenen Mengen im $\mathbb{R}^3$

   $$U := \left\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) \middle| \varphi > 0,\ |r - e^{-\varphi}| < e^{-\varphi-1},\ z^2 < e^{-2\varphi-2} - \left(r - e^{-\varphi}\right)^2\right\},$$
   $$V := \left\{(x, y, \varphi) \middle| x^2 + y^2 < 1,\ \varphi > 0\right\},$$

   sowie die Abbildung $\Phi\colon V \to \mathbb{R}^3$,

   $$\Phi(x, y, \varphi) := \left(e^{-\varphi}\left(1 + \frac{x}{e}\right)\cos\varphi,\ e^{-\varphi}\left(1 + \frac{x}{e}\right)\sin\varphi,\ ye^{-1-\varphi}\right).$$

   (a) (6P) Zeigen Sie, dass Φ ein C^∞-Diffeomorphismus von V auf U ist.

   (b) (4P) Berechnen Sie $\lambda_3(U)$.
   Hinweis: Verwenden Sie den ersten Teil der Aufgabe und den Transformationssatz, um $\lambda_3(U)$ als Integral über V auszudrücken.

3. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$ eine Funktion von der Klasse C^k.

   (a) (4P) Zeigen Sie, dass
   $$M = \{(x, f(x)) | x \in U\}$$
   eine n-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie zeigen, dass M einen Atlas besitzt, der aus der einzigen Karte
   $$\varphi\colon M \to U, \qquad \varphi(x, \xi) = x,$$
   besteht.

   (b) (6P) Wie in Formel (16.1) sei σ das Lebesguemaß auf M. Zeigen Sie für jede σ-integrierbare Funktion $g\colon M \to \mathbb{R}$
   $$\int g \,\mathrm{d}\sigma = \int_U g(x, f(x))\sqrt{1 + \|\nabla f(x)\|_2^2}\,\mathrm{d}\lambda_n(x).$$

4. (10P) Es sei
   $$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(x^2 + y^2\right)^2 + 3x^2y - y^3 = 0\right\}$$
   die Kleeblattschlinge. Zeigen Sie, dass sie keine C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, indem Sie ihren Tangentialraum im Ursprung bestimmen.

Wir wünschen allen ein Frohes Fest und eine gutes Jahr 2020!

Abgabe: Di, 07.01.2020, 10:20 **Besprechung:** 15. und 16. Januar