Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 14.01.2020

Blatt 13

Übungen zur Analysis III

1. (10P) Es sei G der durch $G := \left\{(x,y,z) \middle| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} < 1\right\}$ gegebene C^∞-Polyeder und es sei
$$w(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4xz \\ x + y^2 + z^3 \\ \frac{1}{3}z^3 \end{pmatrix}$$
ein Vektorfeld. Berechnen Sie $\int_{\partial G} \langle w(x), \nu(x) \rangle \, \mathrm{d}\sigma(x)$.

2. (10P) Ein Körper G, welcher ein C^1-Polyeder ist, liegt in einer Flüssigkeit der konstanten Dichte ρ, deren Oberfläche durch $x_3 = 0$ gegeben ist, also $\sup\{x_3 | x_3 \in G\} < 0$. In einem Randpunkt $x \in \partial_r^1 G$ übt diese auf G den Druck $\rho x_3 \nu(x)$ aus. Für die Auftriebskraft
$$F := \int_{\partial G} \rho x_3 \nu(x) \, \mathrm{d}\sigma(x)$$
zeige man
$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \lambda_3(G) \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Es sind keine Physik-Kenntnisse erforderlich. Die benötigten Informationen sind angegeben.

3. Die Differentialformen $\omega \in \Omega^1_\infty(\mathbb{R}^3)$ und $\eta \in \Omega^2_\infty(\mathbb{R}^3)$ seien gegeben durch
$$\omega = x \, \mathrm{d}x + z^2 \, \mathrm{d}y + xyz \, \mathrm{d}z \qquad \text{und} \qquad \eta = (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.$$
Bestimmen Sie

   (a) (2P) $\omega \wedge \eta$
   (b) (2P) $\mathrm{d}\omega$
   (c) (2P) $\mathrm{d}\eta$
   (d) (2P) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta)$
   (e) (2P) $\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}x$.

4. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und es sei $\omega \in \Omega^1_\infty(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch
$$\omega = (3x^2 + 1) f(y) \, \mathrm{d}x + 2(x^3 + x) y \, \mathrm{d}y.$$
   (a) (3P) Bestimmen Sie $\mathrm{d}\omega$.
   (b) (5P) Übersetzen Sie die Gleichung $\mathrm{d}\omega = 0$ in eine Differentialgleichung für f.
   (c) (2P) Geben Sie die Lösungsgesamtheit dieser Differentialgleichung an.

Abgabe: Di, 24.01.2020, 10:20 **Besprechung:** 29. und 30. Januar