Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 15.10.2019

Blatt 2

# Übungen zur Analysis III

1. Auf $\mathbb{N}$ wird offenbar durch $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine $\sigma$-Algebra gegeben.
   (a) (4P) Zeigen Sie, dass durch $\mu\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $M \mapsto \#M$, ein Maß gegeben wird, genannt *Zählmaß*.
   *Hinweis:* Mit $\#M$ wird die Anzahl der Elemente von $M$ bezeichnet. Der naive Zugang zu den Zählproblemen ist völlig ausreichend.
   (b) (2P) Für $j \in \mathbb{N}$ sei $B_j := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq j\}$. Bestimmen Sie $\mu(B_j)$.
   (c) (0P) Überlegen Sie sich, dass $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$.
   (d) (4P) Bestimmen Sie $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right)$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

2. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:
   (a) (4P) Ist $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$, so gilt $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A}$.
   (b) (6P) Ist $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ und $\mu(B_1) < \infty$, so gilt $\mu\big(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\big) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

3. Betrachten Sie
$$\mathcal{R} := \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ endlich oder } \mathbb{Z} \setminus A \text{ endlich}\}.$$
   (a) (4P) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{Z}$ ist.
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass durch
$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ endlich}, \\ 1, & \mathbb{Z} \setminus A \text{ endlich}, \end{cases}$$
   ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ gegeben wird.
   (c) (2P) Zeigen Sie, dass $\mu$ kein Prämaß auf $\mathcal{R}$ ist.

4. (10P) Sei $\eta\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ das äußere Maß aus Beispiel 2.9, also
$$\eta(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$
   Bestimmen Sie sämtliche $\eta$-messbaren Mengen. Vergessen Sie nicht den Nachweis, dass es nicht mehr als die von Ihnen angegebenen $\eta$-messbaren Mengen gibt.

**Abgabe:** Di, 22.10.2016, 10:20 **Besprechung:** 20. und 31. Oktober