Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 22.10.2019

Blatt 3

Übungen zur Analysis III

1. Es sei $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.
   (a) (5P) Geben Sie für jedes $j \in \mathbb{N}$ Figuren F_j und G_j an, so dass $F_j \subseteq T \subseteq G_j$ und $\lambda^2(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$.
   (b) (5P) Bestimmen Sie nun $\lambda^2(T)$, indem Sie $\lim_{j\to\infty} \lambda^2(F_j)$ berechnen.

2. (10P) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

   Es gibt abzählbar viele offene Intervalle $]a_1, b_1[,]a_2, b_2[,]a_3, b_3[, \dots \subseteq \mathbb{R}$, so dass
   $$\mathbb{Q} \cap]0, 1[\subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}]a_j, b_j[\quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \frac{1}{2}.$$

   Hinweis: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, d. h. es existiert eine Bijektion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.

3. Wenn $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum ist, wobei μ ein Borelmaß mit $\mu(X) = 1$ ist, dann bezeichnet man das Maß μ als *Wahrscheinlichkeitsmaß.*

   Man bezeichnet eine monoton wachsende Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als *Verteilungsfunktion,* wenn folgendes gilt
   $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{\substack{x\to\xi \\ x>\xi}} F(x) = F(\xi) \text{ für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$
   Zeigen Sie: Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ ist, dann wird durch
   $$F(x) := \mu(]-\infty, x])$$
   eine Verteilungsfunktion gegeben.

   Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 2.7.

4. Auf Blatt 2 wurde gezeigt, dass
   $$\mathcal{R} := \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ endlich oder } \mathbb{Z} \setminus A \text{ endlich}\}$$
   ein Ring von Teilmengen von $\mathbb{Z}$ ist und dass durch
   $$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ endlich,} \\ 1, & \mathbb{Z} \setminus A \text{ endlich,} \end{cases}$$
   ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ gegeben wird, der kein Prämaß ist.
   (a) (6P) Bestimmen Sie das zugehörige äußere Maß μ^*.
   (b) (2P) Zeigen Sie, dass alle Teilmengen von $\mathbb{Z}$ μ^*-messbar sind.
   (c) (2P) Geben Sie ein $A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A) \neq \mu^*(A)$ an.

Abgabe: Di, 29.10.2016, 10:20 **Besprechung:** 6. und 7. November