Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 05.11.2019

Blatt 5

Übungen zur Analysis III

1. (Je 2P) Stellen Sie fest, ob die jeweiligen Funktionen λ_1-integrierbar sind. Sie brauchen die Integrale nicht auszurechnen, müssen Ihre Antwort aber begründen.
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 e^{-|x|}$.
   (b) $f\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$.
   (d) $f\colon [-1,1] \to \overline{\mathbb{R}},\ f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   (e) $f\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n}, & n-1 \le x < n - \frac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{n}, & n - \frac{1}{2} \le x < n. \end{cases}$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f_n(x) = nx \exp\left(-nx^2\right).$$
   (a) (4P) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für jedes $x \ge 0$.
   (b) (4P) Bestimmen Sie $\int_{[0,\infty[} f_n(x)\ \mathrm{d}\lambda_1(x)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.
   (c) (2P) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x)\ \mathrm{d}\lambda_1(x)$.

3. Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Massraum und es f eine messbare, numerische Funktion auf X. Zeigen Sie:
   (a) (2P) f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.
   (b) (8P) f ist genau dann integrierbar, wenn
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu\left(\left\{x \in X \middle| 2^n \le |f(x)| < 2^{n+1}\right\}\right) < \infty.$$

4. Gegeben seien die numerischen Funktionen
$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$
$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \text{ für teilerfremde } p, q \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass f und g messbar sind.
   (b) (1P) Ist f Riemann-integrierbar?
   (c) (5P) Zeigen Sie, dass g Riemann-integrierbar ist.
   (d) (2P) Bestimmen Sie die Lebesgue-Integrale
$$\int_{[0,1]} f\ \mathrm{d}\lambda_1 \quad \text{und} \quad \int_{[0,1]} g\ \mathrm{d}\lambda_1.$$

Abgabe: Di, 12.11.2016, 10:20 **Besprechung:** 20. und 21. November