Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 12.11.2019

Blatt 6

Übungen zur Analysis III

1. (10P) Berechnen Sie
$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{x+y} \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y).$$

2. (10P) Für eine beschränkte, messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda_n(M) \neq 0$ ist der *Schwerpunkt* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ definiert durch
$$s_j = \frac{1}{\lambda_n(M)} \int_M x_j \, \mathrm{d}\lambda_n(x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n.$$
Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \leq 1,\ x, y \geq 0\}$ und zeichnen Sie D zusammen mit dem Schwerpunkt.

3. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:
   (a) (4P) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[-\pi,\pi]} \sin^n(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$.
   (b) (6P) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^n \mathrm{d}\lambda_1(x)$.

4. (10P) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion, die auf jedem kompakten Intervall im eigentlichen Sinne Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (a) f ist Lebesgue-integrierbar.
   (b) $|f|$ ist uneigentlich Riemann-integrierbar.

   Hinweis: Dies ist die Aussage von Satz 8.6. Ein Verweis auf diesen Satz genügt nicht.

Abgabe: Di, 19.11.2016, 10:20 **Besprechung:** 27. und 28. November