Übungen zur Analysis III

1. (a) (3P) Es sei $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h\}$ der Kreiszylinder mit Radius R und Höhe h. Bestimmen Sie sein Volumen.
   (b) (7P) Es sei $S = \left\{(x,y,z) \in [0,1]^3 \mid x+y+z \leq 1\right\}$ das dreidimensionale Standardsimplex. Bestimmen Sie sein Volumen.

2. Die Funktion $f\colon [0,\infty[^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(y+1)^2} + \dfrac{2y}{x^2}, & 0 \leq y < x, \\ \dfrac{-1}{(y+1)^2}, & 0 \leq x \leq y. \end{cases}$$
   (a) (6P) Bestimmen Sie
$$\int_{[0,\infty[} \int_{[0,\infty[} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_1(y) \, \mathrm{d}\lambda_1(x).$$
   (b) (2P) Ist die auf $[0,\infty[$ erklärte numerische Funktion
$$y \mapsto \int_{[0,\infty[} f(x,y) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$$
   λ_1-integrierbar?
   (c) (2P) Ist f integrierbar bezüglich λ_2?

3. Gegeben sei die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(t,x) = \begin{cases} \dfrac{t^3 x}{(t^2+x^2)^2}, & (t,x) \neq (0,0), \\ 0, & (t,x) = (0,0). \end{cases}$$
   (a) (1P) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch $x \mapsto f(t,x)$ eine λ_1-integrierbare Funktion gegeben wird.
   (b) (4P) Wegen (a) existiert die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_{[0,1]} f(t,x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$. Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist mit $F'(0) = \frac{1}{2}$.
   (c) (4P) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ eine λ_1-integrierbare Funktion gegeben wird und dass
$$\int_{[0,1]} \frac{\partial f}{\partial t}(0,x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = 0.$$
   (d) (1P) Wie verträgt sich das mit Satz 8.8?

4. (10P) Bestimmen Sie alle Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, so dass die Funktion
$$f(x) = \frac{x^a}{1+x^b}$$
über $]0,\infty[$ Lebesgue-integrierbar ist.

   Hinweis: Vergessen Sie nicht zu zeigen, dass die anderen Paare die Eigenschaft nicht haben. Der Versuch, die Integrale auszurechnen, ist nicht sinnvoll; sie müssen stattdessen abgeschätzt werden.

Abgabe: Di, 26.11.2016, 10:20 **Besprechung:** 4. und 5. Dezember