Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 26.11.2019

Blatt 8

Übungen zur Analysis III

1. (10P) Die Menge
$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 0 \leq x \leq 1,\ y^2+z^2 \leq x^2(1-x)^2\right\}$$
ähnelt einem Football. Bestimmen Sie $\lambda_3(F)$.

2. (10P) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$ die Einheitskugel. Zeigen Sie
$$\lambda^n(K_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\pi^k, & n = 2k, \\ \dfrac{2^{k+1}}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}\pi^k, & n = 2k+1. \end{cases}$$
Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion. Es treten Integrale auf, die aus der Analysis I bekannt sind, weil sie beim Beweis des Wallisschen Produktes benötigt werden, nämlich
$$\int_0^{\pi/2} \sin^m(x)dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\prod_{j=1}^n \frac{2j-1}{2j}, & m = 2n, \\ \displaystyle\prod_{j=1}^n \frac{2j}{2j+1}, & m = 2n+1. \end{cases}$$

3. (10P) Ist die Funktion
$$f\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$
λ_2-integrierbar über $[-1,1]^2$? Begründen Sie Ihr Ergebnis.

4. (10P) Für welche $p \in [1,\infty[$ liegt die Funktion
$$f\colon [0,\infty[\to \overline{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}\left(1+x^{5/3}\right)},$$
in $L^p([0,\infty[)$?

Abgabe: Di, 03.12.2019, 10:20 **Besprechung:** 11. und 12. Dezember