Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 03.12.2019

Blatt 9

# Übungen zur Analysis III

1. (10P) Es sei $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{R},3)$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie
$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp\bigl(-x^T A x\bigr)\, d\lambda_3(x) = \pi^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}.$$
*Hinweis:* Wegen des Satzes über die Hauptachsentransformation ist die Voraussetzung gleichwertig dazu, dass es eine orthogonale Matrix $S$ und eine Diagonalmatrix $D$ mit positiven Diagonalelementen gibt, so dass $A = S^T D S$.

2. (10P) Für beschränkte, messbare Funktionen $R_1, R_2 \colon [a,b] \to [0,\infty[$ mit $R_1 \le R_2$ sei
$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| a \le z \le b,\ R_1(z) \le \sqrt{x^2+y^2} \le R_2(z) \right\}$$
ein Rotationskörper mit $\lambda_3(B) > 0$. Sein *Profil* ist gegeben durch
$$P := \left\{ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \middle| a \le z \le b,\ R_1(z) \le x \le R_2(z) \right\}.$$
Es sei $(\xi, \zeta)$ der Schwerpunkt von $P$. Zeigen Sie
$$\xi = \frac{\lambda_3(B)}{2\pi \lambda_2(P)}.$$
*Erläuterung:* Das bedeutet $\lambda_3(B) = L\lambda_2(P)$, wobei $L$ der Umfang des Kreises um die $z$-Achse durch den Schwerpunkt ist (Guldinsche Regel).

3. Sei $f = \chi_{[-1,1]} \in L^1(\mathbb{R})$.
   (a) (4P) Berechnen Sie $f * f$.
   (b) (4P) Berechnen Sie $f * f * f$.
   (c) (2P) Gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $f*f*f \in C^k(\mathbb{R})$? Wenn ja, geben Sie bitte das größte solche $k$ an.

4. (10P) Das Cantorsche Diskontinuum ist definiert als
$$C := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \;\middle|\; \forall j \in \mathbb{N} : a_j \in \{0,2\} \right\}.$$
Finden Sie ein $\delta < 1$, so dass $C$ eine $\delta$-Nullmenge im Sinne von Hausdorff ist. Selbstverständlich sollen Sie Ihre Behauptung beweisen.
*Hinweis:* Beschreiben Sie $C$ unter Verwendung der Mengen
$$C_n = \left\{ y + \sum_{j=1}^{n} a_j 3^{-j} \;\middle|\; \forall j \le n : a_j \in \{0,2\} \text{ und } y \in [0, 3^{-n}] \right\}.$$

**Abgabe:** Di, 10.12.2019, 10:20 **Besprechung:** 18. und 19. Dezember