Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 10.12.2018

Blatt 10

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Für eine Borelmenge B sei das Wahrscheinlichkeitsmaß μ gegeben durch
$$\mu(B) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_B e^{-x^2} d\lambda_1(x).$$
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei
$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$
das n-te Hermite-Polynom.
   (a) (5P) Seien $0 \leq n < m$ fest. Zeigen Sie die Existenz von Polynomen $q_0, \ldots, q_n$, so dass der Grad von q_j höchstens j ist und
$$(H_n, H_m)_{L^2(\mu)} = \int q_{n-j} \frac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} e^{-x^2} d\lambda_1(x).$$
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass $H_n \perp H_m$ für $n \neq m$.
   (c) (1P) Zeigen Sie, dass H_n den Grad n besitzt.

2. (a) (3P) Zeigen Sie $H_n' = 2nH_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.
   Hinweis: Leibniz-Formel
   (b) (7P) Bestimmen Sie die Jacobi-Parameter des Maßes μ aus Aufgabe 1.
   Hinweis: Die Hermite-Polynome sind weder die großen P_n noch die kleinen p_n im Sinne von 16.3.

3. Es sei J_n die n-te Jacobi-Matrix wie in Formel (16.3) von Satz 16.9 und es sei $D_n(x) := \det(x - J_n)$.
   (a) (3P) Zeigen Sie
$$D_n(x) = (x - b_n)D_{n-1}(x) - a_{n-1}^2 D_{n-2}(x).$$
   (b) (6P) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\det(x - J_n) = P_n$, für das durch die Jacobi-Parameter bestimmte P_n.
   (c) (1P) Verwenden Sie Teil (b), um erneut zu beweisen, dass alle Nullstellen von P_n reell sind.

4. (10P) Sei $A \in L(\mathbb{C}^N)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass A genau dann einen zyklischen Vektor besitzt, wenn alle Eigenwerte von A verschieden sind.

Abgabe: Mo, 17.12.2018, in der Vorlesung

Besprechung: 19. Januar