Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 17.12.2018
Blatt 11

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Sei $H = L^2(\lambda_1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Operator $M_n \in L(H)$, der gegeben ist durch
$$(M_n f)(x) = f(x)\left(1 + e^{-(x+n)^2}\right).$$
   (a) (5P) Zeigen Sie, dass die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.
   (b) (5P) Konvergiert die Folge auch in der Operatornorm? Beweisen Sie Ihre Aussage.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in L(\ell^2)$ definiert durch
$$A_n((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n, 0, 0, \dots).$$
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass $\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} A_n = 0$.
   (b) (8P) Besitzt die Folge $(A_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ einen starken Grenzwert? Beweisen Sie Ihre Aussage.

3. (10P) Sei H ein Hilbertraum. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $P_j \in L(H)$ eine orthogonale Projektion. Für jedes j sei $P_j \leq P_{j+1}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{s-lim}_{j\to\infty} P_j$ existiert und gleich der orthogonalen Projektion auf $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{Bild} P_j}$ ist.

4. Sei H ein separabler Hilbertraum.
   (a) (3P) Es sei $E\colon \mathbb{R} \to L(H)$ eine Spektralschar. Zeigen Sie, dass für jedes t der Grenzwert
$$\operatorname{s-lim}_{s\nearrow t} E_s =: E_t^-$$
   existiert.
   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.
   (b) (2P) Zeigen Sie $E_t^- \leq E_t$.
   (c) (3P) Zeigen Sie, dass $E_t - E_t^-$ eine Projektion ist und dass $\operatorname{Bild}(E_t - E_t^-) \perp \operatorname{Bild}(E_s - E_s^-)$, falls $s \neq t$.
   (d) (2P) Zeigen Sie, dass $\left\{t \middle| E_t \neq E_t^-\right\}$ höchstens abzählbar ist.

Frohe Weihnachten!

Abgabe: Mo, 07.01.2018, in der Vorlesung

Besprechung: 16. Januar