Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 14.01.2019

Blatt 13

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Es sei H ein separabler Hilbertraum. Man sagt, dass zwei Operatoren $A, B \in L(H)$ *kommutieren,* wenn
$$[A, B] := AB - BA = 0.$$
Zeigen Sie: Wenn $C \in L(H)$ mit einem selbstadjungierten Operator $A \in L(H)$ kommutiert, dann auch mit $\Phi_A(f)$ für beliebiges $f \in C(\sigma(A))$.

2. Wir hatten auf Blatt 4 der Analysis III das Cantorsche Diskontinuum definiert als
$$C := \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} \,\middle|\, \forall j : a_j \in \{0, 2\} \right\}$$
und gezeigt, dass $\lambda_1(C) = 0$ und dass $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ mit
$$C_n := \left\{ y + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{3^j} \,\middle|\, 0 \leq y \leq 3^{-n} \text{ und } \forall j \leq n : a_j \in \{0, 2\} \right\}.$$
Wir definieren nun rekursiv Funktionen $f_n \colon [0, 1] \to [0, 1]$ wie folgt
$$f_0(x) := x \text{ und } f_{n+1}(x) := \begin{cases} \dfrac{f_n(3x)}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \dfrac{f_n(3x-2)}{2} + \dfrac{1}{2}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$
   (a) (4P) Zeigen Sie $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{2^n}$.
   (b) (4P) Zeigen Sie, dass f_n, $n \in \mathbb{N}$, lokal konstant auf $[0, 1] \setminus C_n$ ist. (Das bedeutet, dass f konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $[0, 1] \setminus C$ ist.)
   (c) (1P) Die wegen Teil (a) existente Funktion $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in C[0, 1]$ heißt *Cantor-Funktion.* Zeigen Sie, dass f lokal konstant auf $[0, 1] \setminus C$ ist.
   (d) (1P) Zeigen Sie, dass f monoton wächst.

Bitte wenden!

3. (Stieltjes-Integral) Für $n \in \mathbb{N}$ und $g \in C[0,1]$ und monoton wachsendes $f\colon [0,1] \to [0,1]$ setzen wir
$$\Phi_n(g) := \sum_{j=1}^{2^n} g\left(\frac{j}{2^n}\right)\left(f\left(\frac{j}{2^n}\right) - f\left(\frac{j-1}{2^n}\right)\right).$$
   (a) (3P) Zeigen Sie, dass $|\Phi_n(g)| \le \|g\|_\infty$.
   (b) (5P) Zeigen Sie, dass $\text{s-lim}_{n\to\infty} \Phi_n =: \Phi$ existiert.
   (c) (2P) Zeigen Sie, dass Φ ein positives Funktional ist.

4. (10P) Es sei f die Cantor-Funktion aus Aufgabe 2. Gemäß Aufgabe 3 und Rieszschem Darstellungssatz gehört dazu ein Borelmaß ν auf $[0,1]$ mit $\Phi(g) = \int g\,d\nu$ für alle $g \in C[0,1]$. Zeigen Sie $\lambda_1 \perp \nu$, wobei λ_1 das Lebesgue-Maß ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Teil (c) von Aufgabe 2.

Abgabe: Mo, 21.01.2018, in der Vorlesung **Besprechung:** 30. Januar