Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 15.10.2018

Blatt 2

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. (10P) Wir identifizieren die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Familie $(f(r))_{r\in\mathbb{R}} \in \prod_{r\in\mathbb{R}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass eine Folge von Funktionen $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann in der Produkttopologie von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ konvergiert, wenn sie punktweise konvergiert. (Punktweise Konvergenz hatten wir in der Analysis I eingeführt.)

2. (10P) Der Produktraum $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sei wie folgt mit einem Halbnormensystem versehen
$$p_n((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|.$$
Zeigen Sie, dass ω damit zu einem Fréchetraum wird.

3. (10P) Zeigen Sie, dass die in Aufgabe 2 konstruierte Metrik die Produkttopologie auf ω induziert.

4. Für eine offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ sei $H(\Omega)$ der in Beispiel 3.6(d) definierte Fréchetraum der holomorphen Funktionen auf Ω. Es sei $z_0 \in \Omega$.

   (a) (4P) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung
   $$T\colon H(\Omega) \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f'(z_0),$$
   stetig ist.

   (b) (6P) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung
   $$D\colon H(\Omega) \to H(\Omega), \quad f \mapsto f',$$
   stetig ist.

   Hinweis: Denken Sie an die Cauchysche Integralformel.

Abgabe: Mo, 22.10.2018, in der Vorlesung

Besprechung: 31. Oktober