Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 22.10.2018

Blatt 3

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. Zeigen Sie:
   (a) (5P) Wenn E ein Fréchetraum und F ein abgeschlossener Unterraum von E ist, dann ist auch F ein Fréchetraum.
   (b) (5P) Wenn E ein metrischer lokalkonvexer Raum und F ein Unterraum ist, der in der Teilraumtopologie ein Fréchetraum ist, dann ist F abgeschlossen.

   Hinweis: Das ist Satz 3.14. Da er in der Vorlesung nicht bewiesen wurde, genügt es nicht, ihn zu zitieren.

2. (10P) Zeigen Sie, dass die Polynome dicht im Raum $H(\mathbb{C})$ der ganzen Funktionen liegen.
   Hinweis: Auch hier genügt es nicht, die Vorlesung zu zitieren.

3. (10P) Es sei f holomorph in einer Umgebung von $\overline{B}_r(z_0)$. Zeigen Sie
$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r(z_0)} f(\zeta)\, d\lambda_2(\zeta).$$
   Hinweis: Cauchy-Integralformel und Fubini.

4. (10P) Für $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen bezeichne $H(\Omega)$ den Raum der holomorphen Funktionen auf Ω. Wir betrachten außerdem den Raum
$$H^2(\Omega) := \{f \in H(\Omega) | \|f\|_{\Omega,2} < \infty\},$$
   wobei $\|f\|_{\Omega,2} = \sqrt{(f,f)_{\Omega,2}}$ und
$$(f,g)_{\Omega,2} := \int_\Omega f(z)\overline{g(z)} d\lambda_2(z).$$
   Dann ist $H^2(\Omega)$ ein Prähilbertraum. (Man kann zeigen, dass er sogar ein Hilbertraum ist.)

   Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\rho_n \colon H^2(B_{n+1}(0)) \to H^2(B_n(0))$ die Einschränkungsabbildung. Zeigen Sie, dass $H(\mathbb{C})$ der projektive Limes von
$$H^2(B_1(0)) \xleftarrow{\rho_1} H^2(B_2(0)) \xleftarrow{\rho_2} H^2(B_3(0)) \xleftarrow{\rho_3} \dots$$
   ist.

   Hinweis: Aufgabe 3

Abgabe: Mo, 29.10.2018, in der Vorlesung **Besprechung:** 7. November