Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 29.10.2018

Blatt 4

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. (10P) Sei $E = C(\mathbb{R})$. Ist $F = C^1(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Unterraum von E? Beweisen Sie bitte Ihre Behauptung.

2. Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$. Dann ist $F = H(\mathbb{C})$ ein Unterraum von $E = C(\mathbb{R}^2)$.

   (a) (4P) Ist F ein abgeschlossener Unterraum von E?

   (b) (6P) Mit derselben Identifizierung ist F auch ein Unterraum von $G = C^1(\mathbb{R}^2)$. Ist F ein abgeschlossener Unterraum von G?

   Beweisen Sie bitte Ihre Behauptungen.

3. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\delta_x \colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$, $\delta_x(f) = f(x)$, die Punktauswertung in x.

   (a) (5P) Die Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass dann $(\delta_{x_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in der Topologie $\sigma(\mathscr{S}(\mathbb{R})', \mathscr{S}(\mathbb{R}))$ konvergiert.

   (b) (5P) Für $j \in \mathbb{N}$ sei $x_j = j$. Konvergiert die Folge $(\delta_{x_j})_{j\in\mathbb{N}}$ in der Topologie $\sigma(\mathscr{S}(\mathbb{R})', \mathscr{S}(\mathbb{R}))$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

4. (10P) Wie in Aufgabe 2 ist $F = H(\mathbb{C})$ ein Unterraum von $E = C(\mathbb{R}^2)$. Die Abbildung $T \colon F \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f'(0)$, ist ein stetig lineares Funktional auf F. Nach dem Satz von Hahn-Banach besitzt sie eine Fortsetzung in E'. Es fallen uns auch sofort Fortsetzungen ein, nämlich für jedes $r > 0$ die Abbildung

$$T_r \colon E \to \mathbb{C}, \quad T_r(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r^+(0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta.$$

   Zeigen Sie, dass für $r \neq R$ die Funktionale T_r und T_R verschieden sind.

Abgabe: Mo, 05.11.2018, in der Vorlesung

Besprechung: 14. November