Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 05.11.2018

Blatt 5

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. (a) (5P) Beweisen Sie den zweiten Teil von Satz 6.8:
   Ist $A\colon E \to F$ eine stetig lineare Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen, so ist $A'\colon F'_\sigma \to E'_\sigma$ stetig.

   (b) (5P) Es sei $E = H(\mathbb{C})$. Nach Beispiel 6.1 kann E' mit dem Raum
   $$F = \left\{ (a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \middle| \exists R, C > 0 \forall f \in \mathbb{N}_0 : |a_j| \leq CR^j \right\}$$
   identifiziert werden. Bestimmen Sie $A'\colon \mathbb{C} \to F$ für $A\colon H(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $Af = f'(i)$.

2. (10P) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $\delta_x \in C(\mathbb{R})'$ definiert durch
   $$\langle \delta_x, f \rangle = f(x).$$
   Konvergiert die Folge $(\delta_{1/n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $C(\mathbb{R})'_b$ gegen δ_0? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (10P) Es sei X ein metrischer Raum. Wir sagen, eine Menge $M \subseteq X$ sei *gleichmäßig beschränkt,* wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass zu je zwei $x, y \in M$ eine Kette $x_0, x_1, \ldots, x_N \in X$ existiert, so dass $x_0 = x$, $x_N = y$ und $d(x_j, x_{j+1}) \leq \epsilon$ für $j = 0, \ldots, N-1$.

   Sei nun E ein metrischer lokalkonvexer Raum mit Fundamentalsystem $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \ldots$ von Halbnormen. Die Metrik d von E sei gemäß Lemma 3.2 aus den p_n konstruiert. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq E$ genau dann beschränkt in der lokalkonvexen Topologie auf E ist, wenn M gleichmäßig beschränkt in der Metrik d ist.

4. (10P) Für ein unbeschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ bestehe $H_0(G)$ aus allen holomorphen Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Ferner sei
   $$G := \bigcup_{0<r<1} H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0)).$$
   Für $f \in H(B_1(0))$ und $g \in G$ sei die Bilinearform
   $$\langle g, f \rangle := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho^+(0)} f(\zeta) g(\zeta) d\zeta$$
   definiert, wobei für $g \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0))$ der Radius ρ beliebig in $]r, 1[$ gewählt wird. Zeigen Sie, dass vermittels dieser Bilinearform der Raum G zum Dualraum von $H(B_1(0))$ wird.

   Hinweis: Laurentreihe

Abgabe: Mo, 12.11.2018, in der Vorlesung

Besprechung: 21. November