Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 12.11.2018

Blatt 6

Übungen zu Funktionalanalysis I

1. (10P) Es sei Ω eine offene Menge im $\mathbb{R}^N$ und es sei
$$\Delta u := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$$
der Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass durch
$$T\colon \varphi \mapsto \int_\Omega \Delta\varphi \, d\lambda_N$$
ein Element von $\mathcal{D}'(\Omega)$ gegeben wird.

2. Es seien E und F normierte Räume und es sei $A\colon E \to F$ nuklear.
   (a) (5P) Es sei $\hat{A}\colon \hat{E} \to \hat{F}$ die Fortsetzung auf die vollständigen Hüllen. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ nuklear ist.
   (b) (5P) Zeigen Sie, dass $A'\colon F' \to E'$ nuklear ist.

3. (10P) Ein Einbettungsspektrum
$$E_1 \hookrightarrow E_2 \hookrightarrow E_3 \hookrightarrow \dots$$
heißt *strikt,* wenn für jedes n der Raum E_n die Unterraumtopologie von E_{n+1} trägt. Zeigen Sie, dass zu jedem strikten Einbettungsspektrum der induktive Limes existiert.

   Hinweis: Hahn-Banach

4. (10P) Für ein unbeschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ bestehe $H_0(\Omega)$ aus allen holomorphen Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$. Für eine streng monoton wachsende Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ sei wie folgt ein induktives Spektrum gegeben
$$H_0(\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_1}(0)) \hookrightarrow H_0(\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_2}(0)) \hookrightarrow H_0(\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_3}(0)) \hookrightarrow \dots$$
wobei die Inklusionsabbildungen gegeben sind durch
$$\iota_n\colon H_0(\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_n}(0)) \hookrightarrow H_0(\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_{n+1}}(0)), f \mapsto f|_{\mathbb{C}\setminus \overline{B}_{r_{n+1}}(0)}.$$
Zeigen Sie dass der induktive Limes existiert und isomorph zu $H(B_1(0))'_b$ ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 5.

Abgabe: Mo, 19.11.2018, in der Vorlesung **Besprechung:** 28. November